

## PENURUNAN PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL (SHALLOW WATER WAVE) MENGGUNAKAN HUKUM KEDUA NEWTON

*Derivation of The Shallow Water Wave Equation Using Newton's Second Law*

**Inayatul Farach Ardianty<sup>1</sup>, Tri Widjajanti<sup>2</sup>, Rium Hilum<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup>Jurusan Matematika dan Statistika, FMIPA, Universitas Papua

Jl. Gunung Salju, Amban, Manokwari, Papua Barat

Email: t.widjajanti@unipa.ac.id

### ABSTRAK

Gelombang air dangkal terjadi ketika permukaan air terganggu oleh angin, gravitasi, gempa bumi, atau tanah longsor di dasar laut. Gelombang ini dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika, yaitu persamaan gelombang air dangkal yang merupakan persamaan diferensial parsial. Persamaan gelombang air dangkal merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan masalah aliran fluida. Suatu sistem di perairan dianggap air dangkal jika kedalaman fluida jauh lebih kecil dari pada panjang gelombangnya. Gelombang air dangkal merupakan penerapan tiga hukum sederhana (Hukum Newton tentang gerak) dalam gejala mekanika klasik. Tahapan dalam penelitian antara lain: melakukan identifikasi masalah, membuat asumsi, dan membentuk persamaan gelombang air dangkal dengan menggunakan Hukum Kedua Newton dan hukum kekekalan massa. Adapun bentuk persamaan gelombang air dangkal dua dimensi adalah

$$u_t + uu_x = -gh_x(x, t).$$

dan

$$h_t = -[u(D + h)]_x.$$

Kata Kunci : Gelombang air dangkal, Fluida, Hukum Kedua Newton.

### ABSTRACT

These waves occur when the surface of the water is disturbed by wind, gravity, earthquakes, or landslides on the seabed. Shallow water waves can be modelled or expressed in mathematical language, namely the shallow water wave equation which is a partial differential equation. The shallow water wave equation is a partial differential equation that describes the fluid flow problem. A system is considered shallow water if the depth of the fluid is much less than its wavelength. Shallow water waves are a phenomenon of classical mechanics which can be described by three simple laws called Newton's laws of motion. The stages in the research include identifying problems, making assumptions, and forming shallow water wave equations using Newton's Second Law and the law of conservation of mass. The form of the two-dimensional shallow water wave equation is

$$u_t + uu_x = -gh_x(x, t).$$

and

$$h_t = -[u(D + h)]_x.$$

**Keywords:** Shallow water waves, Fluid, Newton's Second Law.

### PENDAHULUAN

Gelombang yang terjadi di permukaan laut dengan panjang gelombangnya jauh lebih besar dibandingkan kedalaman gelombangnya disebut gelombang air dangkal. Gelombang ini terjadi ketika permukaan air terganggu

oleh angin, gravitasi, gempa bumi, atau tanah longsor di dasar laut. Pola gelombang air dangkal yang diamati di permukaan laut dapat diselidiki dengan mempertimbangkan karakteristik gelombang ideal. Pola yang ditunjukkan oleh gelombang laut yang

ideal dapat digambarkan dengan sejumlah karakteristik termasuk panjang, tinggi, periode, dan kecepatan (The Maury Project, 2018).

Persamaan gelombang air dangkal berlaku untuk gelombang yang permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman. Persamaan air dangkal merupakan suatu persamaan yang efektif dalam menggambarkan fenomena dinamika fluida. Persamaan gelombang air dangkal adalah suatu persamaan diferensial parsial yang menggambarkan masalah aliran fluida. Persamaan air dangkal berlaku untuk fluida dengan kerapatan massa konstan, tidak kental, dan tidak dapat dimampatkan (Nuraini, 2017). Gelombang air dangkal adalah fenomena mekanika klasik yang dapat dijelaskan dengan menggunakan hukum yang disebut dengan Hukum Newton (Tipler, 1998).

Hukum Pertama Newton mengatakan bahwa jika suatu benda dalam keadaan diam atau bergerak dengan kecepatan konstan, maka benda tersebut akan tetap diam atau terus bergerak pada benda tersebut. Kecenderungan ini digambarkan dengan menyatakan bahwa benda mempunyai kelembaman, sehingga Hukum Pertama Newton dikenal dengan hukum kelembaman. Hukum Kedua Newton menyatakan bahwa resultan gaya yang bekerja pada suatu benda akan menyebabkan perubahan momentum. Perubahan momentum yang dialami suatu benda per satuan waktu berbanding lurus dengan resultan gaya yang bekerja padanya. Hukum ketiga Newton atau hukum interaksi atau hukum aksi reaksi (Tipler, 1998).

Persamaan gelombang dapat diperoleh dengan menggunakan ketiga hukum Newton tersebut.

## **METODE PENELITIAN**

Metode dalam penelitian ini adalah studi literatur yang menganalisis penerapan Hukum Kedua Newton untuk memperoleh persamaan gelombang air dangkal. Secara garis besar, prosedur yang dilakukan adalah, mengidentifikasi masalah terkait gelombang air dangkal, membuat asumsi-asumsi yang dapat digunakan dalam pembentukan persamaan gelombang air dangkal, membentuk persamaan gelombang air dangkal, dan membuat kesimpulan dari hasil yang di peroleh

## **HASIL DAN PEMBAHASAN**

### **Identifikasi Masalah**

Gelombang air yang paling dikenal adalah gelombang air di pantai yang disebabkan oleh angin atau pasang surut, gelombang yang ditimbulkan oleh lemparan batu ke dalam kolam atau oleh tetesan air hujan di sungai. Meskipun gelombang-gelombang tersebut memiliki kemiripan, namun gelombang tersebut adalah jenis gelombang air yang berbeda (Hereman, 2013). Penelitian ini hanya membahas gelombang air dangkal, dimana kedalaman air jauh lebih kecil dari panjang gelombang. Fenomena gelombang ini membutuhkan pengetahuan tentang mekanika fluida. Permasalahan gelombang ini dapat disederhanakan dengan membuatnya dalam bentuk persamaan model matematika yang

menerapkan Hukum Kedua Newton dan menggunakan fakta-fakta dasar berikut.

1. Tekanan Hidrostatik  $P$  (gaya/satuan luas) dalam fluida pada titik kedalaman  $D$  di bawah permukaan fluida sebagai berikut.

$$P = \rho g D. \quad (1)$$

dengan

$P$  : Tekanan dengan satuan  $\frac{N}{m^2}$ .

$\rho$  : Densitas fluida (rapat massa) dengan satuan  $\frac{kg}{m^3}$  atau  $\frac{g}{cm^3}$ .

$g$  : Percepatan gravitasi dengan satuan  $\frac{m}{s^2}$ .

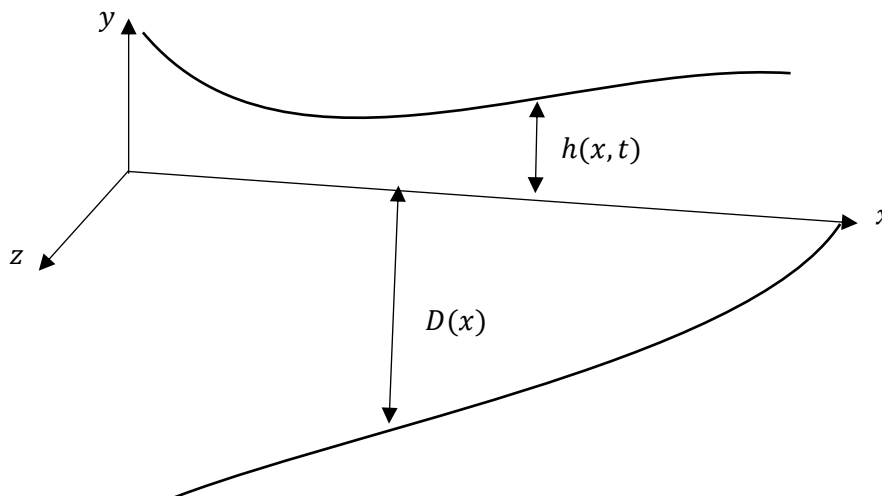
$D$  : Kedalaman fluida dengan satuan  $m$ .

2. Prinsip kekekalan massa menyatakan bahwa laju perubahan massa dalam volume tertentu sama dengan laju di mana

massa volume yang masuk dikurangi laju massa volume keluar.

### Asumsi Pembentukan Persamaan Gelombang Air Dangkal

Air diasumsikan tidak dapat dimampatkan dan karenanya memiliki kerapatan konstan  $\rho$  tidak tergantung pada tekanan  $P$ . Gerakan fluida yang dibahas dalam penelitian ini adalah dua dimensi, dimana setiap partikel fluida dibatasi untuk bergerak dalam dua dimensi  $x$  dan  $y$  yang dapat dilihat pada Gambar 1



Sumber: Humi Mayer *et al*, 1992.

Bottom

Gambar 1. Penampang Gelombang Air Dangkal.

Variabel-variabel pada Gambar 1 adalah  $x, y, z$ , yang merupakan titik dari penampang gelombang air dangkal. Gambar 1 menggambarkan tentang penampang gelombang air dangkal dengan menggunakan koordinat tiga dimensi, namun karena pada penelitian ini hanya memperhatikan gelombang air dangkal dua dimensi sehingga titik koordinat yang diperhatikan hanya  $x$  dan  $y$ , dengan

$h(x, t)$  : Tinggi dari gelombang air dangkal.

$D(x)$  : Kedalaman dari fluida.

Karena gelombang yang diperhatikan adalah gelombang lambat, maka percepatan air kecil dan tekanan pada suatu titik  $(x, y)$  di bawah permukaan air dapat diperkirakan sebagai tekanan hidrostatik. Diberikan tekanan hidrostatik berikut.

$$P(x, y, t) = \rho g[h(x, t) - y] \quad (2)$$

Karena gaya per satuan volume dalam fluida ditentukan oleh gradien tekanan negatif, maka (2) menjadi

$$-P_x = -\rho g h_x(x, t) \quad (3)$$

Akibatnya, gaya per satuan volume dalam arah  $x$  adalah

$$F = -P_x \quad (4)$$

Jika (3) disubstitusi ke (4), maka

$$F = -\rho g h_x(x, t). \quad (5)$$

Karena gaya  $F$  tidak bergantung pada  $y$ , maka komponen  $x$  wajar bila diasumsikan sebagai partikel kecepatan  $u$  yaitu suatu fungsi  $x$  dan  $t$  saja, dinotasikan dengan

$$u = u(x, t). \quad (6)$$

### Pemodelan Persamaan Gelombang Air Dangkal

Diberikan sejumlah kecil air dengan volume  $\Delta V$  dengan Massa air adalah

$$m = \rho \Delta V \quad (7)$$

dengan percepatan partikel  $u$  adalah

$$a = \frac{du}{dt} \quad (8)$$

Jika (5), (7), dan (8) menggunakan Hukum Kedua Newton, maka

$$\rho \Delta V \frac{du}{dt} = -\rho \Delta V g h_x(x, t) \quad (9)$$

Jika (9) disederhanakan, maka

$$\frac{du}{dt} = -g h_x(x, t) \quad (10)$$

Karena  $\frac{du}{dt}$  merupakan fungsi  $u$  terhadap  $x$  dan  $t$ , maka  $\frac{du}{dt}$  dapat diselesaikan dengan menggunakan Aturan Rantai sebagai berikut:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

Karena  $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$ , maka (11) menjadi

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u \quad (12)$$

atau

$$\frac{du}{dt} = u_t + u_x u \quad (13)$$

Jika (13) disubstitusikan ke (10), maka diperoleh

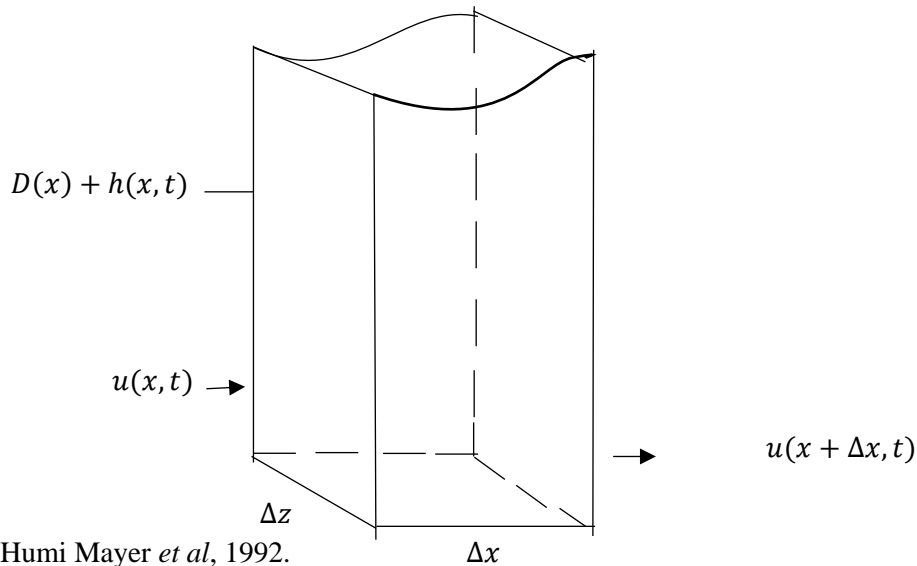
$$u_t + u_x u = -g h_x(x, t) \quad (14)$$

atau

$$u_t + u u_x = -g h_x(x, t) \quad (15)$$

Karena (15) memuat dua satuan yang tidak diketahui yaitu  $h$  dan  $u$ , maka dibutuhkan persamaan bebas yang memuat  $h$  dan  $u$  yang dapat menyelesaikan model. Persamaan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan hukum kekekalan massa.

Penerapan hukum kekekalan massa dalam penelitian ini menggunakan kolam air dengan jarak antara  $x$  dan  $x + \Delta x$  dan panjang horizontal  $\Delta z$  dalam arah  $z$ , perhatikan Gambar 2.



Sumber: Humi Mayer *et al*, 1992.

Gambar 2. Aliran Air dalam Elemen Volume.

Perbedaan antara jumlah air yang masuk dan keluar kolam pada Gambar 2 adalah

$$m = m_{(t+\Delta t)} - m_{(t)} \tag{16}$$

Jika (7) disubstitusikan ke (16), maka diperoleh

$$m = \rho \Delta V_{(t+\Delta t)} - \rho \Delta V_{(t)} \tag{17}$$

Karena  $\Delta V_{(t)} = \Delta x \Delta z h(x, t)$  dan  $\Delta V_{(t+\Delta t)} = \Delta x \Delta z h(x, t + \Delta t)$ , maka (17) menjadi

$$m = \rho \Delta x \Delta z h(x, t + \Delta t) - \rho \Delta x \Delta z h(x, t) \tag{18}$$

atau

$$m = \rho \Delta x \Delta z [h(x, t + \Delta t) - h(x, t)]. \tag{19}$$

Karena (19) harus sama dengan jumlah aliran air yang masuk dan keluar kolam setelah adanya perubahan waktu  $\Delta t$ , maka (19) menjadi,

$$\begin{aligned} \Delta z \Delta t \rho \{ [D(x) + h(x, t)] u(x, t) - [D(x + \Delta x) + h(x + \Delta x, t)] u(x + \Delta x, t) \} \\ = \Delta x \Delta z \rho [h(x, t + \Delta t) - h(x, t)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Jika kedua ruas (20) dibagi dengan  $\rho \Delta x \Delta z \Delta t$ , maka (20) menjadi,

$$\frac{\{ [D(x) + h(x, t)] u(x, t) - [D(x + \Delta x) + h(x + \Delta x, t)] u(x + \Delta x, t) \}}{\Delta x}$$

$$= \frac{[h(x,t+\Delta t)-h(x,t)]}{\Delta t} \tag{21}$$

Jika (21) didekati dengan  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ , maka

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{[D(x)+h(x,t)]u(x,t)-[D(x+\Delta x)+h(x+\Delta x,t)]u(x+\Delta x,t)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[h(x,t+\Delta t)-h(x,t)]}{\Delta t} \tag{22}$$

atau

$$- \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{[D(x+\Delta x)+h(x+\Delta x,t)]u(x+\Delta x,t)-[D(x)+h(x,t)]u(x,t)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[h(x,t+\Delta t)-h(x,t)]}{\Delta t} \tag{23}$$

Jika pada (23) diselesaikan dengan menggunakan turunan, maka (23) menjadi,

$$-[(D + h)u]_x = h_t \tag{24}$$

atau

$$h_t = -[u(D + h)]_x \tag{25}$$

Persamaan (15) dan (24) merupakan persamaan gelombang air dangkal atau *shallow water wave*, yaitu

$$u_t + uu_x = -gh_x(x, t)$$

dan

$$h_t = -[u(D + h)]_x. \tag{26}$$

## KESIMPULAN DAN SARAN

### KESIMPULAN

Persamaan gelombang air dangkal yang diperoleh dari penerapan Hukum Kedua Newton dengan menggunakan sifat turunan. Bentuk umum persamaan gelombang air dangkal (*Shallow Water Wave*) menggunakan Hukum Kedua Newton sebagai berikut:

$$u_t + uu_x = -gh_x(x, t).$$

dan

$$h_t = -[u(D + h)]_x.$$

Penurunan persamaan gelombang air dangkal diperoleh dari memodelkan fenomena air dangkal dan menerapkan Hukum Kedua Newton serta hukum kekekalan massa.

### Penelitian Lanjutan

Penentuan solusi persamaan gelombang air dangkal (*shallow water wave*) yaitu solusi analitik maupun solusi numerik gelombang air dangkal dengan metode yang *up to date* dapat dijadikan penelitian lanjutan

### DAFTAR PUSTAKA

- Boyce.W.E dan R.C.Diprima.2005. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems. Eight Edition.* Jhon Wiley and Sons,Inc. New York.
- Farlow.S.J. 1982. *Partial Differential Equation for Scientists and Engineers.* Jhon Wiley and Sons. New York.
- Giancoli, D.C. 2001. *Fisika Dasar Jilid 1.* Yuhilza H dan Irwan A., Penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Giles, R.V. 1984. *Mekanika Fluida dan Hidraulika.* Herman W.S., Penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Hereman.W. 2013. *Shallow Water Waves and Solitary Waves.* Dapertement Of Mathematical and Computer Sciences. Golden,Colardo USA.
- Humi, Mayer dan Miller William B. 1992. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equatin.* PWS-KENT. Boston.
- Kreyszig. E. 1993. *Matematika Teknik lanjutan.* Bambang Sumantri, Penerjemah. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Makrup.L. 2001. *Dasar-dasar Analisis Aliran di Sungai dan Muara.* Universitas Islam Indonesia Press. Yogyakarta.

- Nuraini. 2017. *Shallow Water Equation Solution in 2D Using Finite Difference Method With Explicit Scheme (Jurnal Natural)*. Vol 17, No.2. Universitas Syiah Kuala. Banda Aceh.
- Olson.R.M. 1993. *Dasar-dasar Matematika Fluida Teknik*. PT Gramedia Pustaka Umum. Jakarta.
- Purcell.E.J.D.Verberg dan S.E.Reigdon. 2003. *Kalkulus Jilid 1*. Nyoman Susila. Erlangga. Jakarta.
- Purcell. E.J.D.Verberg, dan S.E Rigdon. 2003. *Kalkulus Jilid 2*. Nyoman Susila, penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Pratiwi.A.E.2013. Penurunan Persamaan Saint Venant Secara Geometris (*Jurnal Natural*). Vol 6 No.2. Hal 172-200. UNIPA.
- Rumlus.M.D.L. 2020. Penerapan Hukum Kirchoff pada Rangkaian Ekuivalen untuk Memperoleh Persamaan Telegraf (*Jurnal Natural*).Vol 16 No.2. UNIPA
- Salihi.M.*Complate Derivation of 2D Shallow-Water Model from The Primitive Equations Governing Geophysical Flows. Faculty of Science, International Islamic Malaysia.*
- Serway, R. A., and Jewett, J.J. 2009. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Jakarta: Salemba Teknik.
- Setyowati, R. dan Sumardi. 2019. *A Simulation of Shallow Water Wave Equation Using Finite Volume Method: Lax-Friedrichs Scheme. Faculty of Mathematics and Natural Science. Universitas Sebelas Maret.*
- Streeter, V.L., dan E. Benyamin W. 1996. *Mekanika Fluida Jilid 1*. Arko P. Penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- The Maury Project. 2018. *Shallow Water Ocean Waves*. American Meteorological Society. New York Avenue.
- Tipler.P.A. 1998. *Fisika Untuk Sains dan Teknik Jilid 1*. Erlangga. Jakarta.
- Toto, I.E. 2013. Model Kac Walks untuk Persamaan Difusi Dimensi Dua (*Jurnal Natural*). Vol. 6 No. 1, Hal. 84-107. UNIPA.
- Young.H.D dan Freedman.R.A. 2002. *Fisika Universitas Jakarta*. Erlangga. Jakarta.