PENERAPAN HUKUM KIRCHOFF PADA RANGKAIAN EKUIVALEN UNTUK MEMPEROLEH PERSAMAAN TELEGRAF

Application of Kirchoff Law to The Equivalen Circuit to Obtain Telegraph Equation

Maria D. L. Rumlus, Tri Widjajanti, S. Si., M. Si., Rium Hilum, S. Pd., M. Si
Email: laurarumlus11@gmail.com, t.widjajanti@unipa.ac.id, riumhilum@gmail.com.

Abstrak

Telegraf merupakan mesin untuk mengirim dan menerima pesan dari jarak jauh. Telegraf menurut Zauderer dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika yaitu persamaan telegraf. Hukum Kirchoff I berkaitan dengan arus dan Hukum Kirchoff II merupakan dasar untuk menganalisis semua rangkaian listrik. Tujuan penelitian ini adalah mengaplikasikan Hukum Kirchoff untuk memperoleh persamaan telegraf. Tahapan dalam penelitian antara lain: menentukan rangkaian ekuivalen, membuat asumsi, menerapkan Hukum Kirchoff I dan II pada rangkaian ekuivalen tersebut, dan pembentukan persamaan telegraf. Hasil penelitian ini adalah mendapatkan persamaan telegraf yang merupakan persamaan diferensial parsial dengan bentuik umum

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu.$$

Abstract

Telegraph is a machine for sending and receiving messages remotely. Telegraph according to Zauderer can be modeled or expressed in mathematical language, namely the telegraph equation. Kirchoff I's Law deals with currents and Kirchoff II's Law is the basis for analyzing all electrical circuits. The purpose of this research is to apply Kirchoff's Law to obtain the telegraphic equation. The stages in research include: determining the equivalent circuits, making assumptions, applying Kirchoff's Laws I and II to the equivalent circuits, and forming telegraphic equations. The results of this study are to obtain a telegraphic equation which is a partial differential equation with general forms

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu$$

Keyword: Rangkaian Ekuivalen, Hukum Kirchoff, Persamaan Telegraf.

PENDAHULUAN

Telegraf atau telegraf elektrik merupakan mesin untuk mengirimkan dan menerima pesan dari jarak jauh. Salah satu contoh sederhana dari telegraf eletrik adalah pemancar signal radio ke setiap antena radio yang aktif. Telegraf menurut Zauderer Tahun 1983, dapat dimodelkan atau dinyatakan dalam bahasa matematika yaitu persamaan telegraf yang merupakan persamaan diferensial parsial. Telegraf merupakan salah satu mesin yang menggunakan prinsip kerja rangkaian listrik.

Rangkaian listrik (atau rangkaian elektrik) merupakan interkoneksi berbagai *piranti* (*device*) yang secara bersama melaksanakan suatu tugas tertentu. Tugas itu dapat berupa *pemrosesan energi* ataupun *pemrosesan informasi*. Melalui rangkaian listrik, *energi* maupun *informasi* dikonversikan menjadi energi listrik dan sinyal listrik, dan dalam bentuk sinyal inilah energi maupun informasi dapat disalurkan dengan lebih mudah ke tempat ia diperlukan (**Sudirham, 2012**).

Besaran listrik menurut Sudirham Tahun 2012 ada lima besaran listrik yang dihadapi, dua di antaranya merupakan besaran dasar fisika, yaitu *energi* dan *muatan listrik.* Namun dalam analisis rangkaian listrik, besaran listrik yang sering diolah adalah tegangan, arus, dan daya listrik, yang menyatakan suatu sumber atau bagian yang aktif dari suatu rangkaian. Pada beban atau bagian yang pasif dari suatu rangkaian, biasa dinyatakan oleh nilai elemen dari rangkaian listrik, yaitu Resistor (R), Induktor (L), dan Kapasitor (C) (**Greenbreg, 1988)**. Rangkaian ekuivalen merupakan salah satu rangkaian listrik atau rangkaian pengganti, dimana rangkaian tersebut merupakan kombinasi dari setiap elemen yang telah diganti pada rangkaian listrik yaitu resistor, induktor dan kapasitor (**Zukhri, 2007**).

Hukum Kirchoff I (Hukum Arus) dan Hukum Kirchoff II (Hukum Tegangan) merupakan dasar untuk menganalisis semua rangkaian listrik, sehingga dari Hukum Kirchoff dapat diuraikan pada berbagai rangkaian yang diberikan (**Humi dan William, 1992**). Salah satu penerapan Hukum Kirchoff dapat dilihat pada sebuah rangkaian ekuivalen pada bagian kecil sebuah kabel antara x dan $x + \Delta x$ demikian $R\Delta x$ adalah resistansi/hambatan, $L\Delta x$ adalah induktansi, $C\Delta x$ adalah kapasitansi, dan $G\Delta x$ adalah konduktansi dari rangkaian.

Penelitian ini menerapkan Hukum Kirchoff pada rangkaian ekuivalen untuk memperoleh sebuah persamaan telegraf.

METODE PENELITIAN

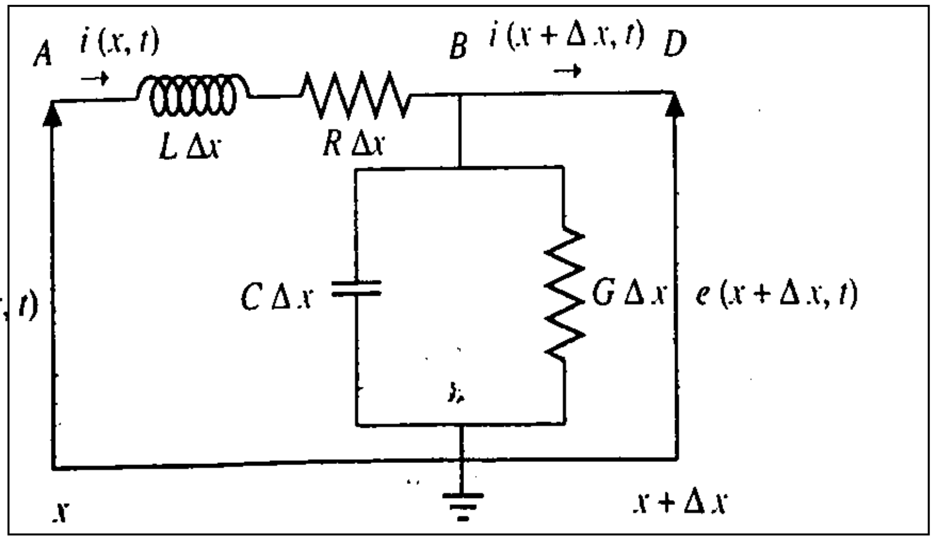
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yang menganalisis terapan dari Hukum Kirchoff pada rangkaian ekuivalen. Secara garis besar, prosedur yang dilakukan adalah membuat asumsi, penerapan Hukum Kirchoff pada rangkaian ekuivalen dan pembentukan persamaaan telegraf dengan menggunakan sifat turunan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Asumsi Pembentukan Persamaan Telegraf dalam Rangkaian Ekuivalen

Saat saluran transmisi seragam dapat diasumsikan bahwa resistansi (R), kapasitansi (C), induktansi (L) dan *leakage*/konduktansi (G) perunit panjang pada saluran transmisi adalah konstan.

Rangkaian listrik yang digunakan adalah rangkaian listrik ekuivalen yang dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 Rangkaian Ekuivalen untuk Bagian Potongan dari Kabelgram.

Elemen setiap rangkaian ekuivalen pada Gambar 1 adalah R, L, C dan G. Karena rangkaian ekuivalen berdimensi satu, maka setiap elemen dikali Δx sehingga diperoleh elemen rangkaian ekuivalen sebagai berikut

$$R = R\Delta x \qquad (1)$$

$$L = L\Delta x \qquad (2)$$

$$C = C\Delta x \qquad (3)$$

dan

$$G = G\Delta x. \qquad (4)$$

Selanjutnya dibahas penurunan tentang R atau resistor. Karena pada resistor arus dan tegangan berbanding lurus **(Sudirham, 2012**), sehingga diperoleh pesamaan tegangan dari R atau resistor yang dinotasikan dengan e_R adalah

$$e_R = R\Delta x\, i. \qquad (5)$$

Karena arus merupakan laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu dimana titik x pada waktu, dan saat tegangan pada posisi x dan pada waktu t, maka arus dan tegangan pada (5) menjadi

$$e_R(x,t) = R\Delta x\, i(x,t). \quad (6)$$

Selanjutnya untuk penurunan tentang L atau induktor. Karena pada induktor tegangan akan ada saat arus berubah terhadap waktu **(Sudirham, 2012)**, sehingga diperoleh persamaan tegangan dari L atau induktor yang dinotasikan dengan e_L adalah

$$e_L = L\Delta x\, \frac{\partial i}{\partial t}. \qquad (7)$$

Karena arus merupakan laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu dimana titik *x* pada waktu *t*, dan saat tegangan pada posisi x dan pada waktu t, maka (7) menjadi

$$e_L(x,t) = L\Delta x\, \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \quad (8)$$

Selanjutnya untuk penurunan C atau kapasitor. Karena pada kapasitor arus hanya akan mengalir jika tegangannya berubah terhadap waktu **(Sudirham, 2012)**, sehingga diperoleh persamaan arus dari C atau kapasitor yang dinotasikan dengan i_c adalah

$$i_c = C\Delta x\, \frac{de}{dt}. \qquad (9)$$

Karena arus mengikuti laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu dimana titik *x* pada waktu *t*, dan saat tegangan pada posisi x dan pada waktu t, maka (9) menjadi

$$i_c(x,t) = C\Delta x\, \frac{\partial e(x+\Delta x,t)}{\partial t}. \qquad (10)$$

Selanjutnya untuk penurunan atau konduktansi atau G = $\frac{1}{R}$, karena konduktansi merupakan kebalikan dari R atau resistor maka arus dan tegangan berbanding lurus juga **(Sudirham, 2012)**, sehingga jika (4) disubsitusikan ke $i = Ge$, maka diperoleh persamaan turunan dari G atau konduktasi yang dinotasikan dengan i_g adalah

$$i_g = G\Delta x e \qquad (11)$$

Karena arus mengikuti laju perubahan jumlah muatan yang melewati titik tertentu dimana titik x pada waktu t, dan saat tegangan pada posisi x dan pada waktu t, maka (11) menjadi

$$i_g(x,t) = G\Delta x\, e(x + \Delta x, t). \qquad (12)$$

Penerapan Hukum Kirchoff

Penerapan Hukum Kirchoff pada rangkaian ekuivalen dengan Hukum Kirchoff II akan diterapkan pada bagian seri dari rangkaian ekuivalen dan Hukum Kirchoff I akan diterapkan pada bagian paralel dari rangkaian ekuivalen. Berikut penerapannya.

Penerapan Hukum Kirchoff II pada A,D

Jika pada A, D yang dapat dilihat pada Gambar 1 diterapkan Hukum Kirchoff II dimana drop atau penurunan tegangan pada suatu Loop harus sama dengan nol pada setiap saat **(Zukhri, 2007),** maka akan diperoleh

$$e(x,t) - e(x + \Delta x, t) = 0. \qquad (13)$$

Persamaan (3.12) merupakan hasil penerapan Hukum Kirchoff II pada A, D dengan drop atau penurunan tegangan pada suatu Loop harus sama dengan nol pada setiap saat. Karena pada A, D terdapat resistor seperti pada Gambar 1, yang mempunyai sifat menghambat arus listrik yang lewat pada resistor dan tegangan yang melalui elemen berbanding lurus dengan arus **(Greenbreg, 1988),** sehingga tegangan yang berada pada A, D dikurangi dengan resistor yang dilewati, jika (6) disubstitusikan ke (13), maka diperoleh

$$e(x,t) - R\Delta x\, i(x,t) - e(x + \Delta x, t) = 0$$
(14)

dan karena pada A, D terdapat induktor seperti pada Gambar 1, yang mempunyai sifat menghambat arus listrik yang dilewati dan menunda timbulnya arus terhadap tegangan yang berpasangan **(Greenbreg, 1988)**, sehingga tegangan yang berada pada A, D dikurangi dengan induktor yang dilewati, jika (8) disubstitusikan ke (14), maka diperoleh:

$$e(x,t) - R\Delta x\, i(x,t) - L\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - e(x + \Delta x, t) = 0$$

atau

$$e(x,t) - e(x + \Delta x, t) = R\Delta x\, i(x,t) + L\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \qquad (15)$$

Sehingga (15) merupakan persamaan baru dari penerapan Hukum Kirchoff II pada A, D.

Penerapan Hukum Kirchoff I pada *Node* B atau Simpul B

Jika pada *Node B* yang dapat dilihat pada Gambar 1 diterapkan Hukum Kirchoff I dimana arus yang menuju simpul dinyatakan positif dan yang meninggalkan simpul dinyatakan negatif atau secara matematis hukum ini ditulis sebagai berikut $\sum i = 0$ **(Zukhri, 2007)**, maka akan diperoleh

$$i(x,t) = i(x + \Delta x, t)$$

atau

$$i(x,t) - i(x + \Delta x, t) = 0. \quad (16)$$

Persamaan (16) merupakan hasil penerapan Hukum Kirchoff I pada *Node* B dengan $\sum i = 0$ sehingga arus sama dengan nol. Karena pada *Node* B terdapat kapasitor seperti pada Gambar 1 yang mempunyai sifat mempercepat arus listrik yang lewat serta menggeser tegangan arus yang melewati kapasitor **(Greenbreg, 1988)**, sehingga arus yang berada pada *Node* B dikurang kapasitor yang dilewati dengan jika (10) disubstitusikan ke (16), maka diperoleh

$$i(x,t) - C\Delta x \frac{\partial e(x+\Delta x,t)}{\partial t} - i(x + \Delta x, t) = 0 \quad (17)$$

dan karena pada *Node* B terdapat konduktansi seperti pada Gambar 1 yang merupakan kebalikan dari resistor, sehingga arus yang berada pada *node B* dikurangi konduktor yang dilewati, jika (12) disubstitusikan ke (17), maka diperoleh

$$i(x,t) - C\Delta x \frac{\partial e(x+\Delta x,t)}{\partial t} - G\Delta x\, e - i(x + \Delta x, t) = 0 \quad (18)$$

atau

$$i(x,t) - i(x + \Delta x, t) = C\Delta x \frac{\partial e(x+\Delta x,t)}{\partial t} + G\Delta x\, e(x + \Delta x, t). \quad (19)$$

Sehingga persamaan (19) merupakan persamaan baru dari penerapan Hukum Kirchoff I pada *Node* B.

Pembentukan Persamaan Telegraf

Pembentukan persamaan telegraf dapat dibentuk dari dua persamaan yang telah didapat dari penerapan Hukum Kirchoff. Berikut penerapannya.

Jika (15) ditukar posisi $e(x,t)$ dan $e(x + \Delta x, t)$, maka diperoleh

$$-e(x + \Delta x, t) + e(x,t) = R\Delta x i(x,t) + L\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \quad (20)$$

Jika (20) dikali (-1), maka diperoleh

$$e(x + \Delta x, t) - e(x,t) = -R\Delta x i(x,t) - L\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}. \quad (21)$$

Jika (21) dibagi dengan Δx, maka diperoleh

$$\frac{e(x+\Delta x,t) - e(x,t)}{\Delta x} = -R\, i(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (22)$$

Jika $\Delta x \to 0$, maka (22) dapat menjadi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e(x + \Delta x, t) - e(x,t)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-Ri(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \right)$$

atau

$$e_x(x,t) = -R\, i(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (23)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan sebuah persamaan dengan $e(x,t)$ yaitu jika (23) didiferensialkan terhadap x dan t, maka diperoleh

$$e_{xx}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\big(e_x(x,t)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-Ri(x,t)-L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right)$$

atau

$$e_{xx}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\big(-Ri(x,t)\big)-\frac{\partial}{\partial x}\left(L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right) \tag{24}$$

dan

$$e_{xt}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\big(e_x(x,t)\big)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-Ri(x,t)-L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right)$$

atau

$$e_{xt}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\big(-Ri(x,t)\big)-\frac{\partial}{\partial t}\left(L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right) \tag{25}$$

Jika menggunakan aturan turunan pada (24) dan (25), maka diperoleh

$$\begin{aligned}e_{xx}(x,t)&=-\left[\frac{\partial R}{\partial x}i(x,t)+R\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\right]-\left[\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}+L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t}\right]\\ &=-\left(0+R\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\right)-\left(0+L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t}\right)\\ &=-R\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}-L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\partial t}\end{aligned} \tag{26}$$

dan

$$\begin{aligned}e_{xt}(x,t)&=-\left[\frac{\partial R}{\partial t}i(x,t)+R\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right]-\left[\frac{\partial L}{\partial t}\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}\right]\\ &=-\left(0+R\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right)-\left(0+L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}\right)\\ &=-R\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}-L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{27}$$

Jika (19) ditukar posisi $i(x,t)$dan $i(x+\Delta x,t)$, maka diperoleh

$$-i(x+\Delta x,t)+i(x,t)=C\Delta x\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}+G\Delta x e(x,t). \tag{28}$$

Jika (28) dikali (-1), maka diperoleh

$$i(x+\Delta x,t)-i(x,t)=-C\Delta x\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}-G\Delta x e(x,t). \tag{29}$$

Jika (29) dibagi dengan Δx, maka diperoleh

$$\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x}=-C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}+-G\,e(x,t). \tag{30}$$

Jika $\Delta x\to 0$, maka (30), dapat menjadi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}-G\,e(x,t)\right)$$

atau

$$i_x(x,t)=-C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}-G\,e(x,t). \tag{31}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan sebuah persamaan dengan $i(x,t)$ yaitu jika (31) didiferensialkan x dan t, maka diperoleh

$$i_{xx}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\big(i_x(x,t)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-Ge(x,t)-C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right)$$

atau

$$i_{xx}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\big(-Ge(x,t)\big)-\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right) \tag{32}$$

dan

$$i_{xt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(i_x(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-Ge(x,t) - C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right)$$

atau

$$i_{xt}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-Ge(x,t)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(C\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right) \quad (33)$$

Jika menggunakan aturan turunan pada (30) dan (31), maka diperoleh

$$\begin{aligned} i_{xx}(x,t) &= -\left[\frac{\partial G}{\partial x}e(x,t) + G\frac{\partial e(x,t)}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x \partial t}\right] \\ &= -\left(0 + G\frac{\partial e(x,t)}{\partial x}\right) - \left(0 + C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x\partial t}\right) \\ &= -G\frac{\partial e(x,t)}{\partial x} - C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (34)$$

dan

$$\begin{aligned} i_{xt}(x,t) &= -\left[\frac{\partial G}{\partial t}e(x,t) + G\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right] - \left[\frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2}\right] \\ &= -\left(0 + G\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right) - \left(0 + C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2}\right) \\ &= -G\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} - C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Selanjutnya setelah diperoleh hasil diferensial dari (23) dan (31), langkah berikutnya untuk memperoleh persamaan dengan $\mathrm{e}(x,t)$ yaitu, jika (31) dan (35) disubsitusikan ke (26) maka diperoleh

$$\begin{aligned} e_{xx}(x,t) &= -R\left(-C\frac{e(x,t)}{\partial t} - Ge(x,t)\right) - L\left(-C\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} - G\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right) \\ &= RC\frac{e(x,t)}{\partial t} + RGe(x,t) + LC\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} + LG\frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \\ &= LC\frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} + \left((LG+RC)\frac{\partial e(x,t)}{\partial t}\right) + RGe(x,t) \end{aligned}$$

atau

$$e_{xx}(x,t) = LCe_{tt} + (LG+RC)e_t + RGe. \quad (36)$$

Demikian untuk mendapatkan persamaan dengan $i(x,t)$, jika (23) dan (27) disubsitusikan ke (34), maka diperoleh

$$\begin{aligned} i_{xx}(x,t) &= -G\left(-Ri(x,t) - L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right) - C\left(-R\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} - L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}\right) \\ &= GRi(x,t) + GL\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + CR\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + CL\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} \\ &= CL\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + \left((GL+CR)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right) + GRi(x,t) \end{aligned}$$

atau

$$= LC\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + \left((LG+RC)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right) + RGi(x,t)$$

atau

$$i_{xx}(x,t) = LCi_{tt} + (LG+RC)i_t + RGe. \quad (37)$$

Persamaan (35) dan (36) disebut persamaan Telegraf atau secara umum
u_{xx}= LCu_{tt}+ $(RC + GL)u_t$+ RGu.

KESIMPULAN

Persamaan telegraf yang diperoleh dari penerapan Hukum Kirchoff pada rangkaian ekuivalen dengan menggunakan sifat turunan. Bentuk umum persamaan telegraf sebagai berikut:

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu.$$

Penurunan persamaan telegraf diperoleh dari memodelkan rangkaian ekuivalen, menerapkan Hukum Kirchoff I dan II serta menerapkan sifat perkalian turunan.

SARAN

Penelitian ini hanya membahas tentang penerapan Hukum Kirchoff pada rangkaian ekuivalen sehingga memperoleh Persamaan Telegraf yang telah ditentukan. Oleh karena itu, disarankan untuk membuat rangkaian listrik ekuivalen yang lain untuk memperoleh Persamaan Telegraf.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce,W. E. dan R. C. Diprima. 2005. **Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems, Eight Edition.** John Wiley & Sons, Inc. New York.

BSN. 2000. **Persyaratan Umum Instalasi Listrik.**

Farlow,S.J. 1982. **Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.** Johm Wiley and Sons. New York.

Giancoli, D.C.1998. **Fisika Edisi 5 Jilid 2.** Yuhilza Hanum, dan Irwan Arifin, Penerjemah.Erlangga. Jakarta.

Greenberg. 1988. **Advanced Engineering Mathematics**. University of Delaware.Denmark.

Humi, Mayer dan William B. Miller. 1992. **Boundary Value Problems and Partial Differential Equations.** United States of America.

Kreyszig, E. 1993. **Matematika Teknik Lanjutan.** Bambang Sumantri, penerjemah. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Purcell, E. J., D. Varberg, dan S.E Rigdon. 2003. **Kalkulus Jilid 1.** Nyoman Susila, penerjemah. Erlangga. Jakarta.

Purcell, E. J., D. Varberg, dan S.E Rigdon. 2003. **Kalkulus Jilid 2.** Nyoman Susila, penerjemah. Erlangga. Jakarta.

Setianto, H. R. Heru dan Djoko Santoso. 2006. **Teori Dasar Rangkaian Listrik.** Pustaka Pena. Jogjakarta.

Sudirham. 2012. **Analisis Rangkaian Listrik** . Bandung; Darpublik.

Zauderer, E. 1983. **Partial Differential Equation of Applied Mathematics**. John Wiley & Sons. New York.

Zukhri, Zainudin. 2007. **Analisis Rangkaian Edisi 2.** Graha Ilmu. Yogyakarta.