SYARAT PERLU SUATU OPERATOR LINEAR A SEBAGAI GENERATOR DARI FUNGSI KOSINUS COS

(The Necessary Conditions for a Linear Operator A as a Generator of Cosine Function Cos)

Tri Widjajanti
Jurusan Matematika dan Statistika, FMIPA
Universitas Negeri Papua

ABSTRACT

This paper will discussed a linear operator A as generator of cosine function Cos by determining the necessary conditions for operator A as a generator of cosine function Cos.

***Keywords**: Generator, Cosine Function, Cos.*

PENDAHULUAN

Teknik pemodelan sistem aliran menggambarkan gerakan partikel – partikel dalam suatu pola tak beraturan yang secara matematis merupakan gerak Brown (*Brownian Motion*). Partikel – partikel dalam aliran seperti itu antara lain sel – sel darah yang bergerak melewati pembuluh tubuh atau melewati ginjal atau paru – paru buatan, bahan bubur yang dibuat dari jus buah yang diproses atau dihisap melewati pipa, dan potongan – potongan kecil batu bara sebagai bahan bakar (*coal – oil slurry*) yang digunakan sebagai sistem pembakaran dalam pembangkit tenaga listrik.

Pemodelan sistem aliran yang menggambarkan gerakan – gerakan yang tidak beraturan dari partikel – partikel dijelaskan dengan menggunakan model Kac Walks yang telah dijabarkan pada Eckstein,1999. Selanjutnya dengan menggunakan model Kac Walks tersebut diperoleh persamaan Telegraph:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

atau :

$$u''(t) + 2au'(t) = Au(t),$$

dengan $A = c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ operator linear pada ruang Banach X.

Pada makalah ini baru disajikan syarat perlu operator linear A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos. Penelitian syarat cukup operator linear A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos dapat dilakukan sebagai penelitian lebih lanjut. Dan pada akhirnya penelitian ini dapat digunakan untuk meneliti syarat perlu dan syarat cukup persamaan Telegraph *well posed*.

FUNGSI ANALITIK, RESOLVENT, DAN PSEUDO RESOLVENT

Berikut ini akan diberikan definisi fungsi analitik dan proposisi yang akan digunakan dalam pembuktian selanjutnya.

Definisi 2.1 (Arendt, 2001)
Diberikan ruang Banach X, himpunan terbuka dan terhubung $\Omega \subset C$ dan fungsi $f : \Omega \to X$.

i) *Fungsi f dikatakan analitik di $z_0 \in \Omega$ jika*

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in C\backslash\{0\}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \text{ ada.}$$

ii) *Fungsi f dikatakan analitik pada Ω jika*

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in C\backslash\{0\}}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \quad \text{ada,}$$

untuk setiap $z_0 \in \Omega$.

Proposisi 2.2 (Arendt dkk, 2001)
Diketahui ruang Banach X dan subruang tertutup $Y \subset X$.
Diberikan himpunan terbuka dan terhubung $\Omega \subset C$ dan $f : \Omega \to X$ analitik.

Jika terdapat barisan $\{z_n\}_{n\in N} \subset \Omega$ *yang konvergen, sehingga* $\lim_{n\to\infty} z_n \in \Omega$ *dan* $f(z_n) \in Y$, *untuk setiap* $n \in$ N, *maka* $f(z) \in Y$, *untuk setiap* $z \in \Omega$.

Dalam bagian ini akan dituliskan definisi dari *resolvent set*, *resolvent* dari operator A, persamaan *resolvent* dan definisi – definisi yang terkait dengan *resolvent* serta proposisi – proposisi yang akan diperlukan pada bagian selanjutnya.

Definisi 2.3 (Arendt dkk, 2001)
Diberikan ruang Banach X atas C dan operator $A : D(A) \to X$. *Resolvent set dari A, ditulis* $\rho(A)$ *didefinisikan sebagai :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathrm{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ ada dan terbatas pada X}\}$$

Fungsi $R(.,A) : \rho(A) \to L(X)$ *disebut resolvent dari A. Dalam hal ini*

$$\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L(X).$$

Proposisi 2.4 (Arendt dkk, 2001)
Diberikan operator A pada X. Jika $\lambda, \mu \in \rho(A)$, *maka*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda, A)\, R(\mu, A).$$

Proposisi 2.5 (Arendt dkk, 2001)
Diberikan operator A dalam X ,dan himpunan terbuka dan terhubung $U \subset C$.
Jika $U \cap \rho(A) \neq \phi$ *dan terdapat fungsi analitik* $F : U \to L(X)$ *sehingga* $\hat{U} = \{\lambda \in U \cap \rho(A) : F(\lambda) = R(\lambda, A)\}$ *mempunyai titik limit di dalam U, maka* $U \subset \rho(A)$ *dan* $F(\lambda) = R(\lambda, A)$, *untuk setiap* $\lambda \in U$.

Berikut ini akan diberikan definisi dari *pseudo – resolvent* dan proposisi yang diperlukan dalam pembuktian – pembuktian berikutnya.

Definisi 2.6 (Kato, 1976)
Diberikan U subset dari C.
Fungsi $R : U \to L(X)$ *disebut pseudo – resolvent jika R memenuhi persamaan resolvent yaitu,*

$$\mathrm{R}(\lambda) - \mathrm{R}(\mu) = (\mu - \lambda)\, \mathrm{R}(\lambda)\, \mathrm{R}(\mu), \quad \text{untuk setiap } \lambda, \mu \in U. \tag{1}$$

Proposisi 2.7 (Kato, 1976)
Diketahui U subset dari C.
Jika $R : U \to L(X)$ *pseudo – resolvent , maka*

a. *Ker* $R(\lambda)$ *dan Ran* $R(\lambda)$ *independent terhadap* $\lambda \in U$.
b. *Terdapat operator A dalam X sehingga* $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ *untuk setiap* $\lambda \in U$ *jika dan hanya jika Ker* $R(\lambda) = \{0\}$.

FUNGSI – FUNGSI TERINTEGRAL BOCHNER

Sebelum membahas tentang Transformasi Laplace, akan dibahas himpunan fungsi – fungsi terintegral Bochner secara lokal pada $[0, \tau]$ untuk setiap $\tau \in \mathrm{R}^+$, dinotasikan dengan $L^1_{loc}(R^+, X)$. Berikut ini diberikan definisi yang terkait dengan fungsi *f* yang terintegral Bochner yang akan diperlukan pada pendefinisian Transformasi Laplace dan bagian yang lain.

Definisi 2.8 (Arendt dkk, 2001)
Diketahui ruang Banach X atas C dan $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^+, \mathrm{X}) := \{\mathrm{f} : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{X} :$ *f terintegral Bochner pada* $[0, \tau]$ *untuk setiap* $\tau \in \mathrm{R}^+\}$.
Selanjutnya didefinisikan Integral Laplace dari f(t) yaitu

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t)\, dt$$

dengan $f \in L^1_{loc}(R^+, X)$ *dan* $\lambda \in C$.
Abscissa dari f, ditulis dengan abs(f) didefinisikan sebagai

$$abs(f) := \inf \{Re\ \lambda \mid \hat{f}(\lambda) \text{ ada}\}.$$

Definisi 2.9 (Arendt dkk, 2001)
Diketahui ruang Banach X atas C. Fungsi $f : I \to X$ *dikatakan terintegral Bochner jika terdapat barisan fungsi sederhana* $f_n : I \to X$, *untuk* $n \in N$ *sehingga*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \mathrm{f}(\mathrm{t}) \text{ a.e dan}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \| f(t) - f_n(t) \|\, dt = 0.$$

Jika $f : I \to X$ terintegral Bochner, maka integral Bochner dari f pada I adalah

$$\int_I f(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\, dt$$

Teorema 2.10 (Arendt dkk, 2001)

Diberikan f, g $\in L^1_{loc}\left(R^+, X\right)$ dengan abs(f) $< \infty$ dan $\lambda_0 >$ maks(abs(f), abs(g)).

Jika $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ untuk sebarang $\lambda > \lambda_0$, maka f(t) = g(t) a. e.

FUNGSI KONTINU KUAT DAN FUNGSI KOSINUS

Bagian ini dituliskan definisi dari fungsi kontinu kuat (*strongly continuous function*) yang digunakan untuk mendefinisikan fungsi kosinus Cos.

Definisi 2.11 (Arendt dkk, 2001)

Fungsi kontinu kuat (strongly continuous function) cos : $R^+ \to L(X)$ disebut fungsi kosinus jika

Cos (0) = I dan

2 Cos (t) Cos (s) = Cos (t + s) + Cos (t – s), $t \geq s \geq 0$. (2)

Lemma 2.12 (Arendt dkk, 2001)

Jika Cos merupakan fungsi kosinus, maka $\omega(Cos) < \infty$.

SYARAT PERLU SUATU OPERATOR LINEAR A SEBAGAI GENERATOR DARI FUNGSI KOSINUS COS

Berikut ini akan diberikan proposisi yang menjelaskan tentang syarat perlu dan syarat cukup suatu operator A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos.

Proposisi 2.13 (Arendt dkk, 2001)

Diberikan fungsi kontinu kuat Cos:$R^+ \to L(X)$.

Jika Fungsi Cos adalah fungsi kosinus, maka

i) *abs(Cos) $< \infty$.*

ii) *Terdapat ω dengan $\omega >$maks{abs(Cos), 0}.*

iii) *Terdapat operator A sehingga $\left(\omega^2, \infty\right) \subset \rho(A)$ dan*

$$\lambda R\left(\lambda^2, A\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Cos\,(t)\, dt,\ \lambda > \omega.$$

Bukti :

Diketahui fungsi Cos adalah fungsi kosinus. Dengan kata lain (2) dipenuhi dan menurut definisi 2.8 abs(cos) < ∞. Akibatnya menurut teorema 2.10 dan Lemma 2.12 diperoleh terdapat *ω dengan ω > maks {abs(Cos), 0}*. Akan ditunjukkan :

$$\lambda R\left(\lambda^2, A\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Cos\,(t)\, dt, \quad \lambda > \omega.$$

Karena diketahui (2) dipenuhi maka diperoleh

$$\frac{1}{\mu^2 - \lambda^2}\left(\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} Cos(t) + Cos(s)\, dt\, ds$$

Diberikan $R(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q\left(\sqrt{\lambda}\right)$ sehingga diperoleh:

$$R(\lambda)R(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} Q\left(\sqrt{\lambda}\right)Q\left(\sqrt{\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda}\left(R(\lambda) - R(\mu)\right),$$

untuk setiap λ, $\mu \in \left(\omega^2, \infty\right) \subset \rho(A)$.

Karena memenuhi (1), maka dengan $\lambda > \omega\ P^{2P}$ merupakan *pseudo – resolvent*. Karena Cos(0) = I, $R(\lambda)x = 0$, $\lambda > \omega\ P^{2P}$ akibatnya x = 0.

Dengan kata lain, Ker $R(\lambda)$= {0}. Akibatnya menurut Proposisi 2.7 terdapat operator A sehingga:

$\left(\omega^2, \infty\right) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R\left(\lambda^2, A\right) = \lambda R\left(\lambda^2\right) = Q(\lambda)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Cos\,(t)\, dt,$$

untuk setiap $\lambda > \omega$.

Selanjutnya dari proposisi di atas didefinisikan generator fungsi kosinus Cos. Diberikan ω > maks {*abs(Cos), 0*}. Operator A disebut generator dari fungsi kosinus Cos jika terdapat ω > 0 sehingga $\left(\omega^2, \infty\right) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R\left(\lambda^2, A\right)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Cos\ (t)\ dt, \quad \lambda > \omega$$

Jika A operator terbatas, dengan $\sqrt{\|A\|} < \lambda$ dan $A^0 = I$, maka $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n$, merupakan contoh fungsi kosinus Cos.

Definisi tentang generator fungsi kosinus Cos di atas di antaranya dapat digunakan untuk menentukan syarat perlu dan syarat cukup persamaan Telegraph *well posed*.

KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan sebelumnya dapat diperoleh:

1. Diberikan fungsi kosinus Cos : $R^+ \to L\ (X)$. Syarat perlu suatu operator linear A sebagai generator dari fungsi kosinus Cos

   Diberikan fungsi kontinu kuat Cos : $R^+ \to L\ (X)$.

   Jika Fungsi Cos adalah fungsi kosinus, maka

   i. *abs(Cos)* $< \infty$.

   ii. *Terdapat* ω *dengan* $\omega >$ *maks {abs(Cos), 0}.*

   iii. *Terdapat operator A sehingga* $\left(\omega^2, \infty\right) \subset \rho(A)$ *dan*

2. $$\lambda R\left(\lambda^2, A\right)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Cos\ (t)\ dt, \quad \lambda > \omega.$$

   Operator A disebut generator dari fungsi kosinus Cos jika terdapat $\omega > 0$ sehingga $\left(\omega^2, \infty\right) \subset \rho(A)$ dan

   $$\lambda R\left(\lambda^2, A\right)=\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \mathrm{Cos}\ (t)\ dt, \quad \lambda > \omega.$$

Dalam paper ini baru disajikan syarat perlu suatu operator linear A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos. Syarat cukup operator linear A merupakan generator dari fungsi kosinus cos dapat dijadikan sebagai penelitian lanjutan.

DAFTAR PUSTAKA

Arendt, W., Charles, J.K. Batty., Mathias, H., and Frank N. 2001, “Vector – Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems“, Birkhaüser Verlag, Basel, Switzerland.

Eckstein, E. C., Goldstein, A., Leggas, M. 1999, “The Mathematics of Suspensions: Kac Walks and Asymptotic Analyticity”, Electronic Journal of Differential Equations.

Kato, T. 1995, “Perturbation Theory for Linear Operators”, Corrected Printing of Second Edition, Springer – Verlag, Berlin Heidelberg.