

SYARAT CUKUP SUATU OPERATOR LINEAR A SEBAGAI GENERATOR DARI FUNGSI KOSINUS COS

(The Sufficient Conditions for a Linear Operator A as a Generator of Cosine Function Cos)

Tri Widjajanti

Jurusan Matematika dan Statistika, FMIPA
Universitas Negeri Papua

ABSTRACT

In this paper, it is discussed an operator A as generator of cosine function Cos by determine the sufficient conditions for operator A as generator of cosine function Cos.

Keywords: Generator, Cosine Function, Cos.

PENDAHULUAN

Teknik pemodelan sistem aliran menggambarkan gerakan partikel-partikel dalam suatu pola tak beraturan yang secara matematis merupakan gerak Brown (*Brownian Motion*). Partikel-partikel dalam aliran seperti itu antara lain sel-sel darah yang bergerak melewati pembuluh tubuh atau melewati ginjal atau paru-paru buatan, bahan bubuk yang dibuat dari jus buah yang diproses atau dihisap melewati pipa, dan potongan-potongan kecil batu bara sebagai bahan bakar (*coal-oil slurry*) yang digunakan sebagai sistem pembakaran dalam pembangkit tenaga listrik.

Pemodelan sistem aliran yang menggambarkan gerakan-gerakan yang tidak beraturan dari partikel-partikel dijelaskan dengan menggunakan model Kac Walks dalam Widjajanti Tri (2006). Selanjutnya dengan menggunakan model Kac Walks tersebut diperoleh persamaan Telegraph:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

atau :

$$u''(t) + 2au'(t) = Au(t) \quad (1)$$

Sebelum mencari solusi dari persamaan Telegraph (1) akan diteliti versi fungsi Kosinus dari masalah syarat batas berikut

$$u''(t) = Au(t), u(t) = f \text{ dan } u'(t) = 0 \quad (2)$$

dengan $A = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operator linear pada ruang Banach X.

Paper ini akan meneliti syarat cukup suatu operator linear A sebagai generator dari fungsi kosinus Cos yang merupakan lanjutan dari penelitian yang berjudul syarat perlu suatu operator linear A sebagai generator dari fungsi kosinus Cos (Widjajanti Tri, 2006). Penelitian ini dapat digunakan untuk meneliti syarat perlu dan cukup agar persamaan Telegraph well posed.

FUNGSI ANALITIK, RESOLVENT, DAN PSEUDO RESOLVENT

Berikut ini akan diberikan definisi fungsi analitik dan proposisi yang akan digunakan dalam pembuktian selanjutnya.

Definisi 2.1 (Arendt, 2001, hal.455)

Diberikan ruang Banach X, himpunan terbuka dan terhubung $\Omega \subset \mathbb{C}$ dan fungsi $f : \Omega \rightarrow X$.

i) Fungsi f dikatakan analitik di $z_0 \in \Omega$ jika

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ ada.}$$

ii) Fungsi f dikatakan analitik pada Ω jika

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ ada,}$$

untuk setiap $z_0 \in \Omega$.

Proposisi 2.2 (Arendt dkk, 2001, hal.456)

Diketahui ruang Banach X dan subruang tertutup $Y \subset X$.

Diberikan himpunan terbuka dan terhubung $\Omega \subset C$ dan $f: \Omega \rightarrow X$ analitik.

Jika terdapat barisan $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ yang konvergen, sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in \Omega$ dan $f(z_n) \in Y$,

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $f(z) \in Y$, untuk setiap $z \in \Omega$.

Dalam bagian ini akan dituliskan definisi dari *resolvent set*, *resolvent* dari operator A , persamaan *resolvent* dan definisi – definisi yang terkait dengan *resolvent* serta proposisi – proposisi yang akan diperlukan pada bagian selanjutnya.

Definisi 2.3 (Arendt dkk, 2001, hal.462)

Diberikan ruang Banach X atas C dan operator $A: D(A) \rightarrow X$. *Resolvent set* dari A , ditulis $\rho(A)$ didefinisikan sebagai :

$$\rho(A) = \{ \lambda \in C \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ ada dan terbatas pada } X \}$$

Fungsi $R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow L(X)$ disebut *resolvent* dari A . Dalam hal ini

$$\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in L(X).$$

Proposisi 2.4 (Arendt dkk, 2001, hal.464)

Diberikan operator A pada X . Jika $\lambda, \mu \in \rho(A)$, maka

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

Proposisi 2.5 (Arendt dkk, 2001, hal.464)

Diberikan operator A dalam X dan himpunan terbuka dan terhubung $U \subset C$.

Jika $U \cap \rho(A) \neq \emptyset$ dan terdapat fungsi analitik

$F: U \rightarrow L(X)$ sehingga $\hat{U} = \{ \lambda \in U \cap \rho(A) : F(\lambda) = R(\lambda, A) \}$ mempunyai titik limit di dalam U , maka $U \subset \rho(A)$ dan $F(\lambda) = R(\lambda, A)$, untuk setiap $\lambda \in U$.

Berikut ini akan diberikan definisi dari *pseudo – resolvent* dan proposisi yang diperlukan dalam pembuktian – pembuktian berikutnya.

Definisi 2.6 (Kato, 1976, hal.428)

Diberikan U subset dari C .

Fungsi $R: U \rightarrow L(X)$ disebut *pseudo – resolvent* jika R memenuhi persamaan *resolvent* yaitu,

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu),$$

(3)

untuk setiap $\lambda, \mu \in U$.

Proposisi 2.7 (Kato, 1976, hal.428)

Diketahui U subset dari C .

Jika $R: U \rightarrow L(X)$ *pseudo – resolvent*, maka

- a. $\text{Ker } R(\lambda)$ dan $\text{Ran } R(\lambda)$ independent terhadap $\lambda \in U$.
- b. Terdapat operator A dalam X sehingga $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ untuk setiap $\lambda \in U$ jika dan hanya jika $\text{Ker } R(\lambda) = \{0\}$.

Sebelum membahas tentang Transformasi Laplace, akan dibahas himpunan fungsi – fungsi terintegral Bochner secara lokal pada $[0, \tau]$ untuk setiap $\tau \in \mathbb{R}^+$, dinotasikan dengan $L_{loc}^1(\mathbb{R}^+, X)$. Berikut ini diberikan definisi yang terkait dengan fungsi f yang terintegral Bochner yang akan diperlukan pada pendefinisian Transformasi Laplace dan bagian yang lain.

Definisi 2.8 (Arendt dkk, 2001, hal. 9)

Diketahui ruang Banach X atas C . Fungsi $f: I \rightarrow X$ dikatakan *terintegral Bochner* jika terdapat barisan fungsi sederhana $f_n: I \rightarrow X$, untuk $n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \text{ a.e dan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\| dt = 0.$$

Jika $f: I \rightarrow X$ *terintegral Bochner*, maka *integral Bochner* dari f pada I adalah

$$\int_I f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt$$

Definisi 2.9 (Arendt dkk, 2001, hal. 28)

Diketahui ruang Banach X atas C dan $L_{loc}^1(\mathbb{R}^+, X) := \{ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow X : f \text{ terintegral Bochner pada } [0, \tau] \text{ untuk setiap } \tau \in \mathbb{R}^+ \}$.

Selanjutnya didefinisikan *Integral Laplace* dari $f(t)$ sebagai

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t) dt \text{ dengan}$$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ dan $\lambda \in C$.

Abscissa dari f , ditulis dengan $abs(f)$ didefinisikan sebagai

$$abs(f) := \inf \{ R \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(\lambda) \text{ ada} \}.$$

Definisi 2.10 (Arendt dkk, 2001, hal. 29)

Diketahui ruang Banach X atas C .

Diberikan $f : \mathbb{R}^{+P} \rightarrow X$. Batas pertumbuhan eksponensial (Exponential growth bound) dari f didefinisikan sebagai

$$\omega(f) = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} \| e^{-\omega t} f(t) \| < \infty \right\}.$$

Jadi, $abs(f) \leq abs(\|f\|) \leq \omega(f)$.

Teorema 2.11 (Arendt dkk, 2001, hal. 30)

Diberikan

$$F(t) := \int_0^t f(s) ds \text{ dan } FB_{\infty B} := \lim_{t \rightarrow \infty} F(t).$$

Jika $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$,

maka $abs(f) = \omega(F - F_\infty)$.

Lebih lanjut, sebagai akibat dari hasil yang telah diperoleh dari Teorema 3.4.6. Karena $\lambda \hat{F}_\infty(\lambda) =$

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_\infty dt = FB_{\infty B} \text{ jika } \operatorname{Re} \lambda > 0, \text{ berakibat}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \lambda \hat{F}(\lambda) \text{ jika } \operatorname{Re} \lambda > \max \{ abs(f), 0 \}.$$

Akibat 2.12 (Arendt dkk, 2001, hal. 38)

Diberikan $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ dan $F(t) := \int_0^t f(s) ds$.

Jika $\operatorname{Re} \lambda > 0$ dan $\hat{f}(\lambda)$ ada, maka $\hat{F}(\lambda)$ ada

$$\text{dan } \hat{F}(\lambda) = \frac{\hat{f}(\lambda)}{\lambda}.$$

Lemma 2.13 (Arendt dkk, 2001, hal. 41)

Jika $a, b > 0$ dan didefinisikan $\lambda_{NB} := a + nb$,

$e_{-\lambda_n}(t) := e^{-\lambda_n t}$, $n \in NB_{OB}$ dan $t \geq 0$, maka

$\{ e_{-\lambda_n} : n \in N \}$ total dalam $L^1(\mathbb{R}^+)$.

Proposisi 2.14 (Arendt dkk, 2001, hal. 41)

Diberikan $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, dengan $abs(f) < \infty$ dan $a > abs(f)$, $b > 0$ dan $\lambda_{NB} := a + nb$.

Jika $\hat{f}(\lambda_n) = 0$, untuk setiap $n \in N$, maka $f(t) = 0$ a.e.

Teorema 2.15 (Arendt dkk, 2001, hal.41)

Diberikan $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ dengan $abs(f) < \infty$ dan $\lambda_{OB} > \max(abs(f), abs(g))$.

Jika $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ untuk sebarang $\lambda > \lambda_{OB}$, maka $f(t) = g(t)$ a. e.

FUNGSI KONTINU KUAT DAN FUNGSI KOSINUS

Bagian ini dituliskan definisi dari fungsi kontinu kuat (*strongly continuous function*) yang digunakan untuk mendefinisikan fungsi kosinus Cos.

Definisi 3.1 (Arendt dkk, 2001, hal.24)

Fungsi $T : \mathbb{R}^{+P} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ dikatakan kontinu kuat (*strongly continuous function*) jika $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto T(t)x$ kontinu untuk setiap $x \in X$.

Definisi 3.2 (Arendt dkk, 2001, hal.207)

Fungsi kontinu kuat (*strongly continuous function*)

$Cos : \mathbb{R}^{+P} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ disebut fungsi kosinus jika

$$Cos(0) = I \text{ dan } 2 Cos(t) Cos(s)$$

$$= Cos(t+s) + Cos(t-s), t \geq s \geq 0.$$

Lemma 3.3 (Arendt dkk, 2001, hal.207)

Jika Cos merupakan fungsi kosinus, maka $\omega(Cos) < \infty$.

SYARAT CUKUP SUATU OPERATOR LINEAR A SEBAGAI GENERATOR DARI FUNGSI KOSINUS COS

Berikut ini akan diberikan proposisi yang menjelaskan tentang syarat perlu dan syarat cukup suatu operator A yang merupakan generator dari fungsi kosinus Cos.

Proposisi 4.1 (Arendt dkk, 2001, hal.208)

Diberikan fungsi kontinu kuat

$$Cos : \mathbb{R}^{+P} \rightarrow \mathcal{L}(X).$$

Jika

- i) $abs(Cos) < \infty$.
- ii) Terdapat ω dengan $\omega > maks \{abs(Cos), 0\}$.
- iii) Terdapat operator A sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Cos(t) dt, \quad \lambda > \omega$$

maka Fungsi Cos adalah fungsi kosinus.

Bukti :

Diketahui $abs(Cos) < \infty$, maka terdapat ω dengan $\omega > maks \{abs(Cos), 0\}$ dan terdapat operator A sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan $\lambda R(\lambda^2, A)$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Cos(t) dt, \quad \lambda > \omega.$$

Akan ditunjukkan fungsi Cos merupakan fungsi kosinus. Dengan kata lain, $2 Cos(t) Cos(s) = Cos(t+s) + Cos(t-s)$, $t \geq s \geq 0$.

Menurut yang diketahui terdapat ω dengan $\omega > maks \{abs(Cos), 0\}$ akibatnya

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (Cos(t+s) + Cos(t-s)) ds dt = \lambda R(\lambda^2, A), \quad \text{untuk } \lambda, \mu > \omega, \text{ dengan } \lambda \neq \mu.$$

Akan ditunjukkan

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (Cos(t+s) + Cos(t-s)) ds dt = \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)), \quad (4)$$

dengan $Q(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda r} Cos(r) dr$.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (Cos(t+s) + Cos(t-s)) ds dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^\infty e^{-\mu s} Cos(t+s) ds + \int_0^\infty e^{-\mu s} Cos(t-s) ds \right\} dt \quad (5)$$

sehingga ruas kanan persamaan (5) menjadi

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_t^\infty e^{-\mu(r-t)} Cos(r) dr + \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-r)} Cos(r) dr \right\} dt \quad (6)$$

Karena fungsi Cos merupakan fungsi genap, maka (6) menjadi

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_t^\infty e^{-\mu(r-t)} Cos(r) dr + \int_{-\infty}^0 e^{-\mu(t-r)} Cos(r) dr + \int_0^t e^{-\mu(t-r)} Cos(r) dr \right\} dt \quad (7)$$

atau

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_t^\infty e^{-\mu r + \mu t} Cos(r) dr + \int_{-\infty}^0 e^{-\mu r + \mu t} Cos(r) dr + \int_{-\infty}^t e^{-\mu t - \mu r} Cos(r) dr \right\} dt \quad (8)$$

atau

$$\int_0^\infty e^{-\mu r} \int_0^r e^{(\mu-\lambda)t} dt Cos(r) dr + \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} dt \int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda)t} dt Cos(r) dr = \frac{1}{\mu - \lambda} \int_0^\infty e^{-\mu r} (e^{(\mu-\lambda)r} - 1) Cos(r) dr -$$

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \int_0^\infty e^{\mu r} (0 - e^{-(\lambda+\mu)r}) Cos(r) dr$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda r} Cos(r) dr - \frac{1}{\mu - \lambda} \int_0^\infty e^{-\mu r} Cos(r) dr +$$

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \int_0^\infty e^{-\lambda r} Cos(r) dr$$

Dengan mengambil $Q(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda r} Cos(r) dr$,

diperoleh

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} (Q(\lambda) - Q(\mu)) + \frac{1}{\lambda + \mu} (Q(\mu) + Q(\lambda))$$

$$= \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu))$$

Jadi,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (Cos(t+s) + Cos(t-s)) ds dt =$$

$$\frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)) \quad (9)$$

Menurut yang diketahui $Q(\lambda) = \lambda R(\lambda^2, A)$, untuk setiap $\lambda > \omega$

sehingga diperoleh $\frac{2}{\mu^2 - \lambda^2}(\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)) = 2\lambda\mu$

$$\frac{R(\lambda^2, A) - R(\mu^2, A)}{\mu^2 - \lambda^2}$$

Dengan menggunakan persamaan *resolvent*, didapat

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\mu^2 - \lambda^2}(\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)) \\ &= 2\lambda\mu R(\lambda^2, A)R(\mu^2, A) \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt \int_0^\infty e^{-\mu s} \text{Cos}(s) ds \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (\text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)) ds dt = \\ &2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt \int_0^\infty e^{-\mu s} \text{Cos}(s) ds, \text{ untuk } \lambda, \mu > \omega \end{aligned}$$

Diambil fungsi

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-\mu s} (\text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)) ds$$

$$\text{dan } g(t) = \int_0^\infty e^{-\mu s} (2\text{Cos}(t)\text{Cos}(s)) ds$$

$f, g \in L^1_{loc}(R^+, X)$ dengan $abs(f) < \infty, abs(g) < \infty$

dan $\omega > \max\{abs(f), abs(g)\}$. Jika $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$

untuk sebarang $\lambda > \omega$, maka $f(t) = g(t)$ a.e.

Selanjutnya, $h(t) = \text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)$ dan $k(t) = 2\text{Cos}(t)\text{Cos}(s)$.

$$f(t) = \hat{h}(\mu) \text{ dan } g(t) = \hat{k}(\mu)$$

Akibatnya, $\hat{h}(\mu) = \hat{k}(\mu)$, untuk setiap $\mu > \max\{abs(h), abs(k)\}$.

Jadi diperoleh

$$2\text{Cos}(t)\text{Cos}(s) = \text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s), t \geq s \geq 0 \quad (10)$$

Selanjutnya dari proposisi 4.4 didefinisikan generator fungsi kosinus Cos. Diberikan $\omega > \max\{abs(\text{Cos}), 0\}$. Operator A disebut generator dari fungsi kosinus Cos jika terdapat $\omega > 0$ sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt, \text{ dengan } \lambda > \omega.$$

KESIMPULAN DAN PENELITIAN LANJUTAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan :

Diberikan fungsi kontinu kuat $\text{Cos} : RP^{+P} \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Syarat cukup suatu operator linear A sebagai generator dari fungsi kosinus Cos adalah

Jika

- i) $abs(\text{Cos}) < \infty$.
- ii) Terdapat ω dengan $\omega > \max\{abs(\text{Cos}), 0\}$.
- iii) Terdapat operator A sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt, \lambda > \omega.$$

maka Fungsi Cos adalah fungsi kosinus.

Pada penelitian ini disajikan syarat cukup suatu operator linear A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos yang merupakan lanjutan dari penelitian sebelumnya yang membahas tentang syarat perlu suatu operator linear A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos. Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk meneliti syarat perlu dan cukup persamaan telegraph *well posed*.

DAFTAR PUSTAKA

- Arendt, W., Charles, J.K. Batty., Mathias, H., and Frank N. 2001, "Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems", Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland.
- Bain, L. J., and Engelhardt, M., 1991, "Introduction to Probability and Mathematical Statistics", Second Edition, University of Idaho, Duxbury Press, Belmont, California.
- Baumgärtel, H., 1985, "Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators", Birkhäuser Verlag, Stuttgart, Berlin.
- Debnath, L. and Mikusiński, P., 1999, "Introduction to Hilbert Spaces with Applications", Second Edition, Department of Mathematics University of Central Florida Orlando, Florida.
- Doob, J.L., 1953, "Stochastic Processes", John Wiley and Sons, Inc, New York.
- Eckstein, E. C., Goldstein, A., Leggas, M., 1999, "The Mathematics of Suspensions : Kac Walks

- and Asymptotic Analyticity”, *Electronic Journal of Differential Equations*.
- Rudin, W., 1986, “Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Inc, Singapore.
- Kato, T., 1995, “Perturbation Theory for Linear Operators”, Corrected Printing of Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Kreyszig, E., “Introduction Functional Analysis with Applications”, 1978, John Wiley and Son, New York.
- Leggas, M., 1999, “Characterizing Erythrocyte Motions in Flowing Blood”, University of Tennessee Memphis.
- Ross, M. S., 1989, *Introduction to Probability Model*, Sixth Edition, Academic Press, Department of Industrial Engineering and Operations Research, University of California.
- Royden, H. L., 1989, “Real analysis”, Third Edition, Mac Millan Publishing Company, New York.
- Weidmann, J., 1980, “Linear Operator in Hilbert Space”, Springer-Verlag New York Inc.
- Zauderer, E., 1976, “Partial Differential Equations of Applied Mathematics”, Polytechnic Institute of New York, John Willey and sons, New York.
- Widjajanti Tri, 2007, “Syarat Perlu Suatu Operator A Sebagai Generator dari Fungsi Kosinus Cos”, *Jurnal Natural*, FMIPA UNIPA.