PEMBENTUKAN LAPANGAN FAKTOR DARI SUATU DAERAH INTEGRAL

(Contruction of Division Field from a Domain Integral)

Tri Widjajanti[1], **Dahlia Ramlan**[2] dan **Rium Hilum**[3]
[1,2,3]*Jurusan Matematika dan Statistika, FMIPA*
Universitas Negeri Papua

ABSTRACT

Ring of integers under the addition and multiplication as integral domain can be imbedded to the field of rational numbers. In this paper we make a construction such that any integral domain can be a field of quotient. The construction contains three steps. First, we define element of field F from elements of integral domain D. Secondly, we show that the binary operations in fare well-defined. Finally, we prove that $f : D \rightarrow F$ is an isomorphisma. In this case, the polynomial ring F[x] as the integral domain can be imbedded to the field of quotient..

Keywords*: Integral Domains, field of quotient, enlarge/imbedded, polynomial ring.*

PENDAHULUAN

Grup G adalah suatu himpunan tak kosong G dengan satu operasi yang memenuhi 4 aksioma. Sedangkan ring R adalah suatu himpunan tak kosong R dengan dua opersi yang memenuhi 8 aksioma yaitu R dengan operasi penjumlahan merupakan grup Abelian, R dengan operasi perkalian berlaku sifat tertutup dan asosiatif, R dengan opersi penjumlahan dan perkalian atau *(R,+,.)* memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan. Contoh dari ring adalah ring bilangan riil dan ring bilangan bulat (Muchlisah N., 2008).

Suatu ring R disebut ring komutatif jika terhadap operasi perkalian (.) berlaku $p.q=q.p$ untuk setiap $p,q \in R$. ring komutatif yang tidak mempunyai pembagi nol disebut daerah integral. Sebagai contoh himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring komutatif tetapi tidak mempunyai pembagi nol, sehingga himpunan bilangan bulat merupakan daerah integral dan bilangan rasional dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring komutatif tetapi tidak mempunyai pembagi nol, jadi bilangan rasional juga merupakan daerah integral. Ring dikatak ring hasil bagi jika ring dengan elemen-elemen yang tidak nol membentuk grup terhadap perkalian. Ring hasil bagi yang komutatif disebut lapangan (*field*) (Herstein, 1999).

Menurut Arifin (2000), jika F lapangan maka F merupakan daerah integral, tetapi belum tentu berlaku sebaliknya, yaitu jika F daerah integral belum tentu lapangan. Sebagai contoh himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan daerah integral tetapi bukan lapangan. Dilain pihak, menurut Herstein (1999), ring bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang merupakan daerah integral dapat diperluas (*enlarged/embedded*) menjadi lapangan bilangan rasional terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Suatu lapangan F disebut lapangan faktor dari daerah integral D jika keanggotaan dari lapangan F berbentuk ${}^{a}/_{b}$ dengan $a,b \in D$ dan $b \neq 0$.

Misalkan F lapangan. Ring polinomial dalam x adalah $F[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ dan semua $a_i \in F, i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Ring polinomial ini merupakan daerah integral. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dianalisis syarat-syarat apa yang diperlukan sehingga suatu daerah integral D dapat dibentuk menjadi lapangan faktor dan bagaimana pembentukan ring polinomial F[x] sebagai daerah integral menjadi lapangan faktor berdasarkan pembentukan daerah integral D menjadi lapangan F.

RING, DAERAH INTEGRAL, LAPANGAN, LAPANGAN FAKTOR DARI SUATU DAERAH INTEGRAL DAN RING POLINOMIAL

Pada bagian ini akan dibahas definisi daerah integral, lapangan, lapangan faktor dari suatu daerah integral dan ring polinomial.

Definisi 2.1 (Herstein I. N., 1999, hal.121)

Diberikan himpunan tak kosong R, dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.). Himpunan (R,+,.) disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. *Untuk setiap* $p, q \in R, p+q \in R$. *(sifat tertutup)*
2. *Untuk setiap* $p, q \in R, p+q = q+p \in R$. *(sifat komutatif)*
3. *Untuk setiap* $p, q \in R, (p+q)+r = p+(q+r)$. *(sifat asosiatif pada penjumlahan).*
4. *Terdapat* $0 \in R$ *sehingga* $p+0 = 0+p = p$ *untuk setiap* $p \in R$. *(elemen identitas).*
5. *Untuk setiap* $p \in R$, *terdapat* $(-p) \in R$ *sehingga* $p+(-p) = (-p)+p = 0$. *(invers).*
6. *Untuk setiap* $p, q \in R,\ p.q \in R$. *(sifat tertutup pada perkalian)*
7. *Untuk setiap* $p, q, r \in R, (p.q).r = p.(q.r)$. *(sifat asosiatif pada perkalian)*
8. *Untuk setiap* $p, q, r \in R, p.(q+r) = pq+pr$ *dan* $(p+q).r = pr+qr$. *(sifat distributif kiri dan distributif kanan).*

Definisi 2.2 (Muclisah N., 2008, hal.6)

Ring R disebut ring komutatif jika terhadap operasi (.) berlaku $p.q = q.p$ *untuk setiap* $p, q \in R$.

Definisi 2.3 (Herstein I. N., 1999, hal.125)

Diberikan R ring komutatif, elemen $c \in R, c \neq 0$ *disebut pembagi nol (zero divisor) jika terdapat* $d \in R, d \neq 0$ *sehingga* $c.d = 0$.

Definisi 2.4 (Herstein I. N., 1999, hal.126)

Ring komutatif yang tidak mempunyai pembagi nol disebut daerah integral.

Definisi 2.5 (Fraleigh J. B., 1999, hal.257)

Diberikan ring $(R,+,.)$ *dan* $(R',+,.)$ *pemetaan* $\tau : R \longrightarrow R'$ *disebut homomorfisma jika untuk setiap* $s, t \in R$ *berlaku*

1. $\tau(s+t) = \tau(s) + \tau(t)$
2. $\tau(s.t) = \tau(s).\tau(t)$

Definisi 2.6 (Fraleigh J. B., 1999, hal.258)

Homomorfisma $\phi : R \rightarrow R'$ *disebut isomorfisma jika* ϕ *fungsi injektif dan surjektif R. Ring R dan R' disebut isomorfik.*

Selanjutnya akan diberikan definisi dari lapangan.

Definisi 2.7 (Fraleigh J. B., 1999, hal.259)

Jika setiap elemen tak nol dalam R merupakan unit (setiap elemen tak nol dalam R mempunyai perkalian dalam R), maka R disebut ring hasil bagi (division ring).

Definisi 2.8 (Muchlisah N., 1999, hal.12)

Jika R suatu ring hasil bagi yang bersifat komutatif, maka R disebut lapangan dan biasa dinotasikan dengan F. Secara lengkap suatu lapangan $(F,+,\ .)$ *dapat didefinisikan sebagai berikut :*

1. $(F,+)$ *grup Abelian.*
2. $(F-\{0\},.)$ *grup Abelian.*
3. *Sifat distributif kiri dan distributif kanan.*

Definisi 2.9 (Herstein I. N., 1999, hal.140)

Suatu ring R dapat di-embed (embedded) ke dalam ring R', jika terdapat isomorfisma dari R ke dalam R'.

Ring R' disebut perluasan dari R jika R dapat di-embed (embedded) dalam R'.

Teorema 2.10 (Herstein I. N., 1999, hal.140)

Setiap daerah integral D dapat di-embed (embedded) dalam suatu lapangan F.

RING POLINOMIAL

Berikut ini akan dibahas definisi kesamaan dua polinomial, penjumlahan polinomial dan perkalian polinomial.

Definisi 3.1 ((Herstein I. N., 1999, hal.153))

Diberikan $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$ *dan* $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n =$

$\sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in F$, $p(x) = q(x)$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan bulat* $i \geq 0$, *berlaku* $a_i = b_i$.

Definisi 3.2 ((Herstein I. N., 1999, hal.153))

Jika $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ *dan* $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ *keduanya ada dalam F[x], maka* $p(x) + q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_i x^i$, *untuk setiap bilangan bulat* $i \geq 0$, *berlaku* $a_i = b_i$.

Definisi 3.3 ((Herstein I. N., 1999, hal.154))

Jika $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ *dan* $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in F[x]$, *maka* $p(x)q(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$, *dengan* $c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + a_{i-2} b_2 + \cdots + a_0 b_i$.

LAPANGAN FAKTOR DARI RING POLINOMIAL

Menurut Herstein (1999), Ring polinomial *F[x]* merupakan daerah integral. Oleh karena itu, ring polinomial dapat di-embed menjadi lapangan faktor.

Misalkan $\frac{p(x)}{q(x)}$ dan $\frac{r(x)}{s(x)} \in F[x]$. Selanjutnya didefinisikan penjumlahan dan perkalian sebagai berikut : $\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)}$ dan $\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}$. Akan ditunjukkan operasi penjumlahan dan perkalian *well-defined*, yaitu jika $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p'(x)}{q'(x)}$ dan $\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{r'(x)}{s'(x)}$ (1), maka akan ditunjukkan a) $\frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p'(x)s'(x)+q'(x)r'(x)}{q'(x)s'(x)}$ dan b) $\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p'(x)r'(x)}{q'(x)s'(x)}$.

Bukti :

a) Akan ditunjukkan $\frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p'(x)s'(x)+q'(x)r'(x)}{q'(x)s'(x)}$, dengan kata lain $\left(p(x)s(x) + q(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = \left(p'(x)s'(x) + q'(x)r'(x)\right)q(x)s(x)$.
Jika ruas kanan berlaku sifat distributif dan komutatif, maka diperoleh
$\left(p(x)s(x) + q(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = p(x)s(x)q'(x)s'(x) + q(x)r(x)q'(x)s'(x) = p(x)q'(x)s(x)s'(x) + q(x)q'(x)r(x)s'(x)$ (2)
Karena (1) mewakili kelas ekuivalen yang sama, maka diperoleh $p(x)q'(x) = q'(x)p(x)$ dan $r(x)s'(x) = s(x)r'(x)$ (3)
Jika (3) disubstitusi ke ruas kanan (2), maka diperoleh
$\left(p(x)s(x) + q(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = q(x)p'(x)s(x)s'(x) + q(x)q'(x)s(x)r'(x) = q(x)s(x)p'(x)s'(x) + q(x)s(x)q'(x)r'(x) = q(x)s(x)\left(p'(x)s'(x) + q'(x)r'(x)\right)$
Sehingga diperoleh $\left(p(x)s(x) + q(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = q(x)s(x)\left(p'(x)s'(x) + q'(x)r'(x)\right)$ atau $\frac{p(x)s(x)+q(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p'(x)s'(x)+q'(x)r'(x)}{q'(x)s'(x)}$. Jadi, terbukti penjumlahan *well-defined*.

b) Akan ditunjukkan $\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p'(x)r'(x)}{q'(x)s'(x)}$.
Dengan kata lain akan ditunjukkan $\left(p(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = q(x)s(x)\left(p'(x)r'(x)\right)$.
Bukti :
$\left(p(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = p(x)r(x)q'(x)s'(x) = p(x)q'(x)r(x)s'(x)$ (4)
Jika (1) mewakili kelas ekuivalen yang sama, maka $p(x)q'(x) = q(x)p'(x)$ dan $r(x)s(x) = s(x)r'(x)$ (5)
Jika (5) disubstitusi ke (4), maka diperoleh $\left(p(x)r(x)\right)q'(x)s'(x) = q(x)s(x)\left(p'(x)r'(x)\right)$ atau $\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p'(x)r'(x)}{q'(x)s'(x)}$. Jadi terbukti perkalian *well-defined*.

Jadi, dari a) dan b) terbukti bahwa operasi-operasi penjumlahan dan perkalian well-defined.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $(F[x], +, .)$ lapangan.

Bukti :

1. Sifat Tertutup terhadap Penjumlahan.
   Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$ dan $\frac{r(x)}{s(x)} \in F[x]$. $\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)} \in F[x]$.
2. Sifat Asosiatif terhadap Penjumlahan.
   Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\frac{r(x)}{s(x)}$ dan $\frac{t(x)}{u(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0, s(x) \neq 0, u(x) \neq 0$, jika menggunakan definisi penjumlahan, sifat distributif, maka diperoleh
   $\left(\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)}\right) + \frac{t(x)}{u(x)} = \frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)} + \frac{t(x)}{u(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \left(\frac{r(x)}{s(x)} + \frac{t(x)}{u(x)}\right)$.

Jadi terbukti sifat asosiatif terhadap penjumlahan.

3. Elemen Identitas terhadap Penjumlahan.
Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0$. Misalkan elemen identitas adalah $\frac{r(x)}{s(x)}$, $s(x) \neq 0$, maka diperoleh $\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ atau $\frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ atau $\big(p(x)s(x) + q(x)r(x)\big)q(x) = q(x)s(x)p(x)$, dengan menggunakan hukum penghapusan, sifat asosiatif dan operasi aljabar, diperoleh $r(x) = 0$. Jadi, terbukti elemen identitas pada *F[x]* terhadap operasi penjumlahan.

4. Invers terhadap Penjumlahan.
Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0$. Misalkan $\frac{t(x)}{u(x)}$, $u(x) \neq 0$ invers dari $\frac{p(x)}{q(x)}$, maka diperoleh $\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{t(x)}{u(x)} = \frac{0}{1}$ atau $\frac{p(x)u(x) + q(x)t(x)}{q(x)u(x)} = \frac{0}{1}$ atau $\big(p(x)u(x) + q(x)t(x)\big)1 = q(x)u(x)\,0$ atau $p(x)u(x) + q(x)t(x) = 0$ atau $q(x)t(x) = -p(x)u(x)$ atau $\frac{t(x)}{u(x)} = \frac{-p(x)}{q(x)}$. Jadi, invers dari $\frac{p(x)}{q(x)}$ adalah $\frac{-p(x)}{q(x)}$.

5. Sifat Komutatif terhadap Penjumlahan.
Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$ dan $\frac{r(x)}{s(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0, s(x) \neq 0$, maka diperoleh $\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)s(x)+q(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{q(x)r(x)+p(x)s(x)}{q(x)s(x)} = \frac{r(x)}{s(x)} + \frac{p(x)}{q(x)}$. Jadi, terbukti sifat komutatif terhadap penjumlahan.

6. Sifat Asosiatif terhadap Perkalian.
Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\frac{r(x)}{s(x)}$ dan $\frac{t(x)}{u(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0, s(x) \neq 0, u(x) \neq 0$, maka diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)}\right) \cdot \frac{t(x)}{u(x)} = \left(\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}\right) \cdot \left(\frac{t(x)}{u(x)}\right) = \frac{p(x)r(x)t(x)}{q(x)s(x)u(x)} = \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \cdot \left(\frac{r(x)t(x)}{s(x)u(x)}\right) = \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \cdot \left(\frac{r(x)}{s(x)} \cdot \frac{t(x)}{u(x)}\right)$.
Jadi, terbukti sifat asosiatif terhadap perkalian.

7. Sifat Komutatif terhadap Perkalian.
Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$ dan $\frac{r(x)}{s(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0, s(x) \neq 0$, maka diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \cdot \left(\frac{r(x)}{s(x)}\right) = \frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{r(x)p(x)}{s(x)q(x)} = \left(\frac{r(x)}{s(x)}\right) \cdot \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$.
Jadi, terbukti sifat komutatif terhadap perkalian.

8. Sifat Distributif.
   i) Sifat Distributif Kiri
   Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\frac{r(x)}{s(x)}$ dan $\frac{t(x)}{u(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0, s(x) \neq 0, u(x) \neq 0$, maka diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)}\right)\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right) = \left(\frac{p(x)s(x)+r(x)q(x)}{q(x)s(x)}\right)\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right)$. Dengan menggunakan definisi perkalian, sifat distributif, operasi bilangan rasional dan hukum penghapusan, diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)}\right)\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right) = \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right) + \left(\frac{r(x)}{s(x)}\right)\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right)$. Jadi terbukti sifat distributif kiri.
   ii) Sifat Distributif Kanan
   Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\frac{r(x)}{s(x)}$ dan $\frac{t(x)}{u(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0, s(x) \neq 0, u(x) \neq 0$, maka diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{r(x)}{s(x)} + \frac{t(x)}{u(x)}\right) = \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{r(x)u(x)+s(x)t(x)}{s(x)u(x)}\right)$. Dengan menggunakan definisi perkalian, sifat distributif, operasi bilangan rasional dan hukum penghapusan, diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{r(x)}{s(x)} + \frac{t(x)}{u(x)}\right) = \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{r(x)}{s(x)}\right) + \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right)$. Jadi terbukti sifat distributif kanan.

Jadi, dari (i) dan (ii) membuktikan sifat distributif .

9. Elemen Identitas terhadap Perkalian.
Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0$. Misalkan elemen identitas pada perkalian adalah $\frac{r(x)}{s(x)}$, $s(x) \neq 0$, maka diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \cdot \left(\frac{r(x)}{s(x)}\right) = \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)$ atau $\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ atau $p(x)r(x)q(x) = q(x)s(x)p(x)$, dengan menggunakan hukum penghapusan diperoleh

$\frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{p(x)} = \frac{1}{1}$. Jadi, terbukti elemen identitas pada *F[x]* terhadap operasi perkalian adalah $\left(\frac{p(x)}{p(x)}\right)$ atau $\left(\frac{1}{1}\right)$.

10. Invers terhadap Perkalian.
    Diambil sebarang $\frac{p(x)}{q(x)} \in F[x]$, $q(x) \neq 0$.
    Misalkan $\frac{t(x)}{u(x)}$, $u(x) \neq 0$, invers dari $\frac{p(x)}{q(x)}$, maka diperoleh $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right).\left(\frac{t(x)}{u(x)}\right) = \left(\frac{1}{1}\right)$ atau $\frac{p(x)t(x)}{q(x)u(x)} = \frac{1}{1}$ atau $p(x)t(x) = q(x)u(x)$ atau $\frac{t(x)}{u(x)} = \frac{q(x)}{p(x)}$. Jadi, invers dari $\frac{p(x)}{q(x)}$ adalah $\frac{q(x)}{p(x)}$.

Jadi, terbukti bahwa ring polinomial *F[x]* dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan lapangan ■

Berdasarkan Teorema 2.10, maka dapat dikonstruksi daerah integral menjadi lapangan faktor.
Bukti :
Akan ditunjukkan *(f)* homomorfisma ring, fungsi injektif, dan fungsi surjektif.

1. Homomorfisma Ring
   a) Diambil sebarang unsur $p(x), q(x) \in F[x]$, berlaku $f(p(x) + q(x)) = [p(x) + q(x)]$, dan dengan menggunakan Definisi 2.5 diperoleh $f(p(x)) + f(q(x)) = [(p(x), 1)] + [(q(x), 1)] = [(p(x).1 + q(x).1, 1)] = [(p(x) + q(x), 1)]$.
      Akibatnya $f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$.
      Dengan kata lain, terbukti homomorfisma ring terhadap penjumlahan.
   b) Diambil sebarang unsur $p(x), q(x) \in F[x]$, berlaku $f(p(x)q(x)) = [(p(x)q(x), 1)]$, dan dengan menggunakan Definisi 2.5, diperoleh $f(p(x))f(q(x)) = [(p(x), 1)]\,[(q(x), 1)] = [(p(x)q(x), 1)]$.

      Akibatnya $f(p(x)q(x)) = f(p(x))f(q(x))$.
      Dengan kata lain, terbukti homomorfisma ring terhadap perkalian.

   Jadi, dari a dan b terbukti bahwa homomorfisma ring.

2. Fungsi Injektif
   Diambil sebarang $p(x), q(x) \in F[x]$ dan $f(p(x)) = f(q(x))$, maka diperoleh $f(p(x)) = f(q(x))$ atau $[(p(x), 1] = [(q(x), 1]$ atau $p(x) = q(x)$. Jadi, f injektif.

3. Fungsi Surjektif
   Untuk setiap $[(p(x), 1]$ di *F[x]*, terdapat $p(x) \in D$ sehingga $f(p(x)) = [(p(x), 1)]$. Jadi, surjektif.

Jadi, dari 1 – 3 dapat disimpulkan bahwa merupakan isomorfisma ■

Sehingga dapat disimpulkan bahwa ring polinomial sebagai daerah integral dapat di-*embeded (embedded)* menjadi lapangan faktor.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil peneliltian dapat disimpulkan :

1. Suatu daerah integral sebarang dapat di-*embed* (*embedded*) menjadi lapangan dengan syarat-syarat sebagai berikut :
   a) Menentukan lebih dahulu unsur-unsur dalam *F*.
      Unsur-unsur dalam *F* adalah kelas ekuivalen dari $D \times D' = \{(a, b) | a, b \in D, b \neq 0\}$.

   b) Mendefinisikan operasi biner dalam *F* yang dibentuk.
      Operasi biner dalam *F* adalah penjumlahan dan perkalian dengan definisi $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ dan $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ dan pendefinisian ini *well-defined*.

   c) Membuktikan lapangan.
      Himpunan *F* dengan operasi biner membentuk lapangan, yaitu *(F, +)* grup Abelian, *(F-{0},.)* grup Abelian, dan sifat distribusi kiri dan sifat distributif kanan.

   d) Membuktikan *f:D→F* isomorfisma yaitu, *f* homomorfisma ring, *f* injektif, *f* dan surjektif.

Lapangan *F* ini disebut lapangan faktor dari *D*.

2. Ring polinomial *F[x]* sebagai daerah integral dapat di-*embed (embedded)* menjadi lapangan faktor berdasarkan pembuktian sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin A. 2000. Aljabar. Penerbit ITB. Bandung.

Fraleigh. J. B. 1999, A First Course in Abstract Algebra. Sixth Edition. Addison Wesley Publishing Company. Inc USA.

Herstein I. N. 1999. Topic in Algebra . Second Edition. Mac Millan Publishing Company. USA.

Muchlisah N. 2008. Teori Gelanggang dan Lapangan (Struktur Aljabar).Cetakan 1. LPP UNS dan UNS Press. Surakarta.

Sukirman 2005. Pengantar Aljabar Abstrak, Cetakan 1. Penerbit Universitas Negeri Malang. Malang.