PENENTUAN NILAI DAN WAKTU OPTIMAL PADA OPSI AMERIKA YANG MEMBAYARKAN *DIVIDEN*

(Stability and Equilibrium Analysis of Malaria's Epidemics in Manokwari Barat District Based on SIR Epidemic Model)

Andi Fajeriani Wyrasti, S. Pd, M. Si[1]
[1]*Jurusan Matematika dan Statistika, FMIPA*
Universitas Negeri Papua
e-mail: ichan80math@yahoo.com

ABSTRACT

Opsi Amerika adalah salah satu jenis opsi yang memiliki ciri khusus, yaitu dapat diexercise kapan saja sebelum masa jatuh tempo hingga waktu jatuh tempo. Namun kendala muncul saat akan menentukan kapan waktu yang tepat untuk mengexercise opsi. Masalah penentuan waktu optimal untuk mengexercise opsi Amerika memerlukan ketelitian khusus, karena solusi eksaknya tidak dapat langsung ditemukan, terlebih lagi bila terdapat pembayaran dividen pada opsi tersebut. Masalah ini erat kaitannya dengan masalah free boundary. Dengan menggunakan Persamaan Differensial Parsial (PDP) $\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}+(r-D)s\frac{\partial C}{\partial s}-rC=(-Ds+rK)^+ H(s-s_c(t))$ *untuk opsi Call Amerika dan* $\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}+(r-D)s\frac{\partial P}{\partial s}-rP=(Ds-rK)^+ H(s_p(t)-s)$ *untuk opsi Put Amerika yang merupakan modifikasi dari PDP Black-Scholes pada opsi Amerika yang membayarkan dividen, dan dengan simulasi numerik menggunakan Metode Elemen Hingga, akan dicari penyelesaian untuk masalah ini.*

***Keywords**: Opsi Amerika, Free Boundary, PDP Black-Scholes, Metode Elemen Hingga.*

PENDAHULUAN

Option (opsi) adalah suatu kontrak untuk menjual atau membeli suatu *asset* (*Underlying asset*) yang beresiko (seperti saham perusahaan, mata uang, komoditas pertanian, pertambangan, dsb) pada harga tertentu (yang dikenal dengan *Strike price*) dalam periode waktu tertentu (masa hidup opsi).

Opsi memberikan perlindungan yang diinginkan pemiliknya dan memungkinkan terjadinya spekulasi untuk memperoleh gain (keuntungan) dari perubahan harga yang terjadi pada *underlying asset* tetapi tidak mengalami loss (kerugian) yang akan muncul akibat transaksi opsi tersebut. Jadi, pemilik opsi dapat memilih untuk tidak meng-*exercise* opsi miliknya dan membiarkan hingga *maturity time* (jatuh tempo), dengan maksud untuk menghindari kerugian yang mungkin saja terjadi jika harga saham di pasar tidak menguntungkan pemilik opsi.

Namun, menentukan nilai yang wajar untuk sebuah opsi memerlukan model penentuan yang rumit. Model yang paling terkenal dan sering digunakan adalah model Black-Scholes, yang dapat diprogram kedalam kalkulator saku dan sangat berguna untuk perhitungan-perhitungan yang tidak terlalu sulit. Namun model ini hanya dapat digunakan untuk angka-angka pada saat *maturity time* (jatuh tempo), sehingga model ini hanya cocok untuk opsi Eropa. Sementara itu fakta menunjukkan bahwa sebagian besar opsi yang diperdagangkan adalah opsi Amerika karena adanya fasilitas *early exercise* menjadikan opsi ini sangat digemari. Masalah yang muncul kemudian adalah kapan waktu yang tepat untuk meng*exercise* sebuah opsi Amerika karena hingga saat ini belum ada formula khusus yang siap dipakai untuk menentukan nilai opsi Amerika sebab nilai dan waktu optimal untuk meng-*exercise* opsi Amerika tidak dapat dengan mudah diselesaikan dengan analisis keuangan.

Pada masalah ini, dengan menerapkan Metode Elemen Hingga, diharapkan dapat diperoleh batas *exercise* optimal untuk opsi *call* Amerika dan opsi *put* Amerika khususnya untuk opsi yang membayarkan *dividen*.

PDP JAMSHIDIAN UNTUK OPSI AMERIKA

Harga saham dapat berubah sewaktu-waktu yang sifatnya acak. Banyak faktor yang turut mempengaruhi harga saham, yang semuanya tidak dapat kita duga sebelumnya. Faktor-faktor ini meliputi faktor deterministik dan faktor acak. Disamping itu, pembayaran *dividen* pada opsi yang memberikan *dividen* juga mengakibatkan turunnya harga saham sesaat setelah pembayaran *dividen*.

Akibat adanya faktor deterministik dan faktor acak serta pembayaran *dividen* yang mempengaruhi perubahan harga saham, maka model harga saham dapat kita rumuskan sebagai berikut :

$$ds = \mu s\, dt + \sigma s\, dB - Ds\, dt \quad (1)$$

dengan $\mu s\ dt$ menyatakan faktor deterministik dan $\sigma s\ dB$ menyatakan faktor acak. dB yang dikenal sebagai proses Wiener yang berdistribusi $N(0,dt)$.

Nilai opsi sangat tergantung pada masa jatuh tempo dan harga *underlying asset*-nya (contohnya harga saham). Misalkan V menyatakan nilai dari sebuah opsi (baik *call* maupun *put*). V adalah fungsi dari s dan t. Misalkan dibentuk sebuah portofolio yang terdiri atas 1 opsi dan Δ saham

$$\pi = V - \Delta s$$

maka perubahan dalam selang waktu t adalah

$$d\pi = dV - \Delta ds - Dsdt \quad (2)$$

Dari persamaan (1)-(2) dan menggunakan deret Taylor, diperoleh :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + (r - D)s\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0 \quad (3)$$

Namun persamaan ini hanya akan berlaku jika opsi tidak di*exercise*. Adanya fasilitas *early exercise* pada opsi Amerika berdampak bahwa opsi Amerika dapat di*exercise* kapan saja sebelum jatuh tempo, akibatnya penentuan nilai opsi Amerika lebih rumit sebab untuk setiap waktu t kita tidak hanya menentukan nilai opsi, tapi harus pula menentukan suatu batas $s = s_f(t)$ sebagai batas untuk membuat keputusan apakah opsi akan di*exercise* atau tidak. $s_f(t)$ ini selanjutnya merupakan batas *exercise* optimal untuk opsi Amerika (sebut s_c batas *exercise* optimal opsi *call* Amerika dan s_p batas *exercise* optimal opsi *put* Amerika). Masalah penentuan $s_f(t)$ ini dikenali sebagai masalah *free boundary* (masalah batas bebas).

1. Opsi *Call* Amerika

Untuk opsi *call* Amerika jika opsi tidak di*exercise*, persamaan (3) diatas dapat dinyatakan sebagai :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + (r - D)s\frac{\partial C}{\partial s} - rC = 0 \quad (4)$$

Sedangkan jika opsi di*exercise* maka PDP yang berlaku adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + (r - D)s\frac{\partial C}{\partial s} - rC = -Ds + rK \quad (5)$$

Dari Persamaan (4) dan (5), PDP untuk penentuan opsi *call* Amerika dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} + (r - D)s\frac{\partial C}{\partial s} - rC = (-Ds + rK)H(s - s_c(t)) \quad (6)$$

dengan H fungsi indikator yang didefinisikan oleh :

$$H(s - s_c(t)) = \begin{cases} 0, & s < s_c(t) \\ 1, & s \geq s_c(t) \end{cases}$$

dan

$$s_c^*(t) = \inf\{s \geq s_c(t) \mid C(s,t) = s - K\}\ .$$

Serta syarat awal dan syarat batasnya :

$$C(s,T) = \max(s - K, 0),\quad 0 \leq s \leq S$$
$$C(0,t) = 0,\quad 0 \leq t \leq T$$
$$C(S,t) = S - K,\quad 0 \leq t \leq T$$
$$S_c(T) = \max\left(K, \tfrac{r}{D}K\right)$$

2. Opsi *Put* Amerika

Untuk opsi *Put* Amerika, PDP yang berlaku bila opsi tidak di*exercise* adalah

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + (r - D)s\frac{\partial P}{\partial s} - rP = 0 \quad (7)$$

Dan jika opsi di*exercise* maka PDP yang berlaku adalah

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + (r - D)s\frac{\partial P}{\partial s} - rP = Ds - rK \quad (8)$$

Dari Persamaan (7)-(8), maka PDP untuk opsi *Put* Amerika adalah

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 P}{\partial s^2}+(r-D)s\frac{\partial P}{\partial s}-rP=(Ds-rK)H(s_p(t)-s) \quad (9)$$

dengan H fungsi indikator yang didefinisikan oleh:

$$H(s_p(t)-s)=\begin{cases}0, & s>s_p(t)\\ 1, & s\le s_p(t)\end{cases}$$

dan

$$s_p^*(t)=\sup\{s\le s_p(t)\mid P(s,t)=K-s\}\ .$$

Serta syarat awal dan syarat batasnya :

$P(s,T) = max(K - s,0),\ 0 \le s \le S$

$P(0,t) = K,\quad 0 \le t \le T$

$P(S,t) = 0,\quad 0 \le t \le T$

$s_p(T) = min\ (K, \frac{r}{D}K)$

METODE ELEMEN HINGGA UNTUK NILAI OPSI DAN WAKTU *EXERCISE* OPTIMAL

Selanjutnya akan dibahas mengenai Metode Elemen Hingga (MEH) untuk penentuan nilai dan waktu *exercise* optimal pada opsi *call* Amerika dan opsi *put* Amerika yang membayarkan *dividen*.

Misalkan $V = H_0^1(0,S)$ adalah ruang Sobolev. $C(s,t)$ ditransformasi dengan $U(s,t) = y_c(s) - C(s,t)$ dengan $y_c(s) = s\frac{S-K}{S}$. Sehingga persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+(r-D)s\frac{\partial U}{\partial s}-rU=F(s,S_c(t)) \quad (10)$$

dengan $F(s,S_c(t)) = -Ds + (Ds - rK)H(s - s_c(t))$
dan $s_c(t) = inf\{s \ge s_c(t+) | U(s,t) = U(s.T)\}$
dengan syarat awal dan syarat batas :

$$\begin{cases}U(s,T)=y_c(s)-\max(s-K,0), & 0\le s\le S\\ U(0,t)=0, & 0\le t\le T\\ U(S,t)=0, & 0\le t\le T\\ s_c(T)=\max(K,\frac{r}{D}K)\end{cases}$$

Pada saat $t = T$, transformasi fungsi *Payoff*-nya adalah :

$U(s,T) = y_c(s) - max(s - K,0)$

Misalkan sebuah operator diferensial didefinisikan :

$$\mathcal{L} = \sigma^2 s^2 \frac{\partial}{\partial s^2} + (r-D)s\frac{\partial}{\partial s^2} - rI \quad (11)$$

Akibatnya persamaan (10) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial U(s,t)}{\partial t} + \mathcal{L}U(s,t) = F(s,Sc(t)) \quad (12)$$

Hasil kali dalam persamaan (12) dengan *test function* $v \in V$:

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, v\right\rangle + \langle \mathcal{L}U, v\rangle = \langle F, v\rangle$$

Dengan adalah hasil kali dalam pada $\mathcal{L}^2(0,S)$, yang didefinisikan sebagai :

$$\langle u,v\rangle=\langle u(s),v(s)\rangle_{[0,S]}=\int_0^S u(s)v(s)\,ds \quad (13)$$

Langkah-langkah penyelesaian MEH pada opsi *call* Amerika adalah sebagai berikut :

Tahap 1. Pada fungsi nilai opsi, ketelitian titik-titik difokuskan pada harga-harga saham disekitar *strike price* (K). MEH memungkinkan penggunaan *grid non-equidistant* pada pembentukan *grid*nya. Namun pada tulisan ini, pembentukan *grid* hanya dilakukan untuk *grid* yang *equidistant*. Untuk pembentukan *grid underlying asset* s dan waktu t, misalkan diberikan integer positif M dan N. Selanjutnya buat titik-titik seragam k dan h, masing-masing sebagai *stepsize* dari waktu t dan *stepsize* dari *underlying asset* s, dengan $k = \frac{T}{N}$ dan $h = \frac{S}{M}$. Sehingga diperoleh titik-titik diskrit t dan s, masing-masing yaitu : $t^j = jk,\ j = N, N-1, \ldots, 1, 0$ dan $s(i) = ih,\ i = 0,1,\ldots,M-1,M$.

Pada tahap pertama ini akan dihitung nilai-nilai pada *grid* ke-*N*. Solusi $U^j(s)$ dari persamaan (10) dihampiri dengan $u_h^j(s)=\sum_{i=1}^{M-1}\alpha_i^j\phi_j(s)$ dengan $j = N, N-1, \ldots, 1, 0$ dan vektor $\alpha^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_{M-1}^j)^{T,}$ serta *free boundary* $s_c^N = \max\{K, \frac{r}{D}K\}$.

Misalkan $u_h^N(s)$ adalah proyeksi orthogonal $\mathcal{L}^2$ pada $U(s,T)$ yang didefinisikan sebagai $u_N^j(s)=\sum_{i=1}^{M-1}\alpha_i^N\phi_j(s)$ dengan vektor kolom $\alpha^N = (\alpha_1^N, \alpha_2^N, \ldots, \alpha_{M-1}^N, \ , \ldots, \ )T$ sedemikian sehingga $\left\langle U(T,s)-\sum_{i=1}^{M-1}\alpha_i^N\phi_i, \phi_l\right\rangle=0$, dengan $l = 1,2,\ldots,M-1$. Jika $K \in s_i$, maka $\alpha_i^N = U(s_i,T)$, $U(s_i,T) \in Vh$.

Tahap 2. Untuk tahap ke-2 akan dihitung nilai-nilai pada *grid* ke-N-1. Pada level t ke-(N-1), α^{N-1} =

$A^{-1}B\alpha^N + A^{-1}f^N$. *A, B* matriks tridiagonal berukuran *(M-1)×(M-1)*

$$A = (a_{ij}) = \langle \phi_j, \phi_i \rangle, \quad (14)$$

$$B = (b_{ij}) = (1-rk)\langle \phi_j, \phi_i \rangle - \frac{1}{2}k\sigma^2 \left\langle s^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial s}, \frac{\partial \phi_i}{\partial s} \right\rangle + (r-D-\sigma^2)\left\langle s\frac{\partial \phi_j}{\partial s}, \phi_i \right\rangle \quad (15)$$

$$f_i^N = \begin{cases} -k\langle F_1, \phi_i \rangle_{[s_{i-1}, s_{i+1}]}, & s_i < s_c^N \\ -k\langle F_1, \phi_i \rangle_{[s_{i-1}, s_i]} - k\langle F_2, \phi_i \rangle_{[s_i, s_{i+1}]}, & s_i = s_c^N, \\ -k\langle F_2, \phi_i \rangle_{[s_{i-1}, s_{i+1}]}, & s_i > s_c^N \end{cases} \quad (16)$$

$$F_1(s) = Ds\left(\frac{K}{S}\right) - Ds \text{ dan } F_2(s) = Ds\left(\frac{K}{S}\right) - rK \quad (17)$$

dan $s_c^{N-1} = \min\limits_{1 \le i \le M-1} \left\{ s_i \ge s_c^N \left\| u_h^{N-1}(s_i) - U(s,T) \right| \le \varepsilon \right\}$

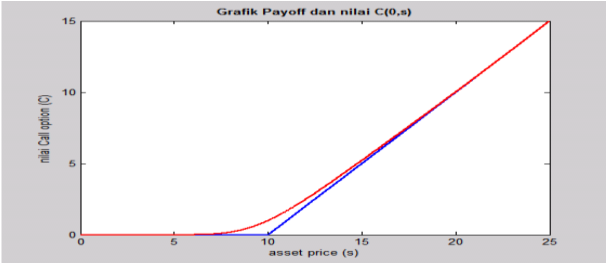
dengan $\varepsilon = 10^{-4}$

Tahap 3. Pada tahap ke-3 akan dihitung nilai-nilai pada *grid* ke-*N-2, N-3, ..., 1, 0*. Pada tahap ini, $\alpha^j = (2A-B)^{-1}B\alpha^{j+2} + 2(2A-B)^{-1} f^{\,j+1}$, A, B matriks tridiagonal berukuran *(M-1)×(M-1)* seperti yang didefinisikan pada (11)–(14), dan $f^{\,j+1} = \begin{pmatrix} f_1^{j+1} \\ f_2^{j+1} \\ \vdots \\ f_{M-1}^{j+1} \end{pmatrix}$

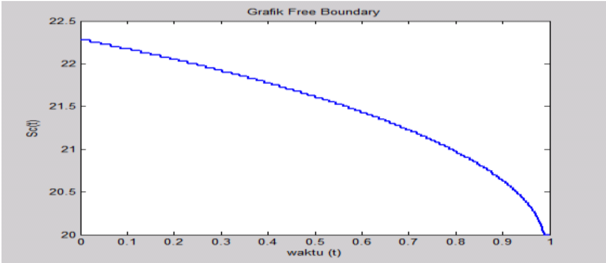
dengan $j = N-2, N-1, \ldots, 1, 0$ dan

$$s_c^j = \min_{1 \le i \le M-1} \left\{ s_i \ge s_c^{j+1} \left\| u_h^j(s_i) - U(s_i, T) \right| \le \varepsilon \right\}$$

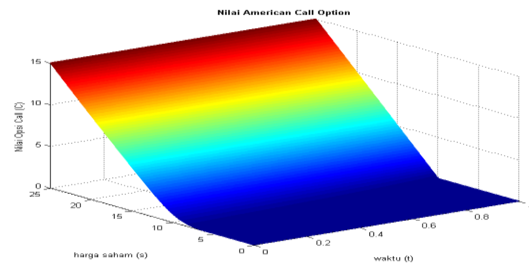
Ketiga tahapan di atas dijalankan dengan menggunakan *software* Matlab 6.5.1. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *input-input K=10, T=1, σ=0.2, r=0.1, D=0.05, ε=10-4, M=N=1200, S=25*, diperoleh hasil seperti pada gambar 1. Dari gambar 1(a), s_c merupakan perpotongan antara kurva nilai opsi *call* pada saat *t=0* (warna merah) dengan kurva *Payoff* (warna biru), atau dapat dinyatakan seperti gambar 1(b) dan 1(c). Informasi lain yang dapat kita tangkap dari hasil tersebut (gambar 1(b)) adalah walaupun tidak terlalu *smooth* (halus), namun kurva *free boundary* merupakan fungsi monoton turun terhadap waktu. Artinya, dengan bertambahnya waktu, nilai sc akan terus turun sampai batas max(K, $\frac{r}{D}K$) pada saat *maturity time*. Sementara itu, nilai opsi merupakan fungsi yang kontinu terhadap s, *smooth*, dan kemiringannya kontinu seperti terlihat pada 1(a). Dan berdasarkan hasil komputasi, diperoleh batas *exercise* optimalnya adalah 22.375.



(a)



(b)



(c)

Gambar 1. Grafik *Payoff* dan grafik *free boundary* opsi *call* Amerika dengan *dividen* D = 0.05

Tanpa *dividen*, diperoleh hasil seperti gambar 2. Dengan *put* yang sama kecuali *dividen* (D=0), dari hasil komputasi diperoleh batas *exercise* optimalnya adalah 24.625.

Selanjutnya untuk opsi *put*, *P(s,t)* ditransformasi dengan : *W(s,t)* = $y_p(s)$ – *P(s,t)* dengan $y_p(s) = K\frac{S-s}{S}$. Sehingga persamaan (9) dapat dinyatakan sebagai :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + (r-D)s\frac{\partial W}{\partial s} - rW = F(s, S_p(t)) \quad (18)$$

dengan $F(s,S_p(t)) = Ds\frac{K}{S} - rK + (rK - Ds)H(s_p(t)-s)$ dan $s_p(t) = \sup\{s \le s_p(t+) | W(s,t) = W(s,T)\}$ dengan syarat awal dan syarat batas :

$$\begin{cases} W(s,T) = y_p(s) - \max(K-s,0), & 0 \le s \le S \\ W(0,t) = 0, & 0 \le t \le T \\ W(S,t) = 0, & 0 \le t \le T \\ s_p(T) = \min(K, \frac{r}{D}K) & \end{cases}$$

Pada saat t = T, transformasi fungsi *Payoff*nya adalah :

$W(s,T) = y_p(s) - \max(K - s,0)$

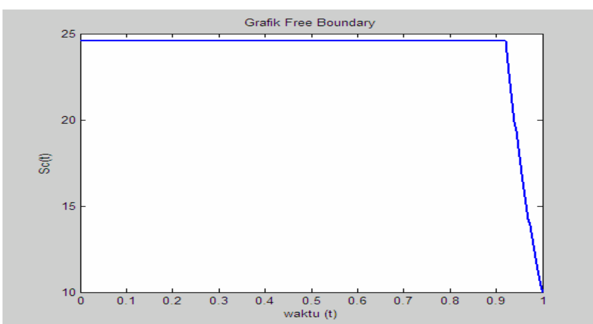
Dengan operator diferensial (11), persamaan (18) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial W(s,t)}{\partial t} + \mathcal{L}W(s,t) = F(s,S_p(t)) \qquad (19)$$

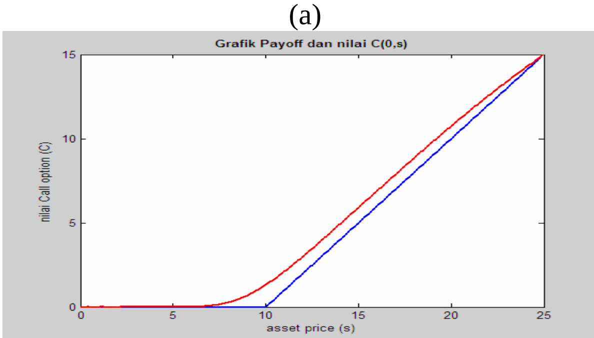
Hasil kali dalam persamaan (19) dengan *test function* v ∈ V :

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, v \right\rangle + \langle \mathcal{L}W, v \rangle = \langle F, v \rangle$$

Dengan $\langle \bullet, \bullet \rangle$ adalah hasil kali dalam yang didefinisikan pada (13).



(a)



(b)

Gambar 2. Grafik *Payoff* dan grafik *free boundary* opsi *call* Amerika tanpa *dividen*

Selanjutnya, langkah-langkah penyelesaian MEH pada opsi *put* Amerika adalah sebagai berikut :

Tahap 1. Pembentukan titik-titik *grid* dilakukan serupa dengan *grid* pada opsi *call* Amerika. Pada tahap ini akan dihitung nilai-nilai pada *grid* ke-N. Solusi $W^j(s)$ dari (18) dihampiri dengan $w_h^j(s) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^j \phi_j(s)$ dengan $j = N, N-1, \ldots, 1, 0$ dan vektor $\alpha^j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_{M-1}^j)^T$, serta *free boundary* $s_p^N = \min\{K, \frac{r}{D}K\}$. Misalkan $w_h^N(s)$ adalah proyeksi orthogonal $\mathcal{L}^2$ pada $W(s,T)$ yang didefinisikan sebagai $w_N^j(s) = \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_j(s)$ dengan α^N suatu vektor kolom $(\alpha_1^N, \alpha_2^N, \ldots, \alpha_{M-1}^N)^T$ sedemikian hingga $\left\langle W(s,T) - \sum_{i=1}^{M-1} \alpha_i^N \phi_i, \phi_l \right\rangle = 0$, dengan $l = 1,2,\ldots,M-1$. Jika $K \in s_i$, maka $\alpha_i^N = W(s_i,T)$, $W(s_i,T) \in Vh$

Tahap 2. Untuk tahap ke-2 akan dihitung nilai-nilai pada *grid* ke-N-1. Pada level t ke-$(N-1)$, $\alpha^{N-1} = A^{-1}B\alpha^N + A^{-1}f^N$. A, B matriks tridiagonal berukuran (M-1)×(M-1) seperti (14 – 15) dan f_i^N didefinisikan sebagai :

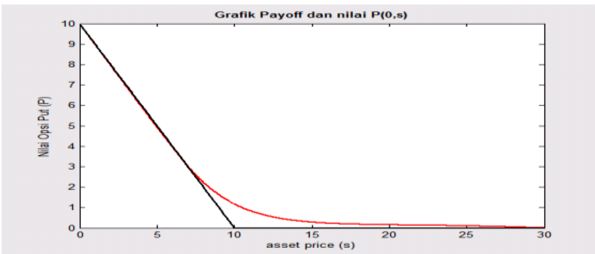
$$f_i^N = \begin{cases} -k\langle F_1, \phi_i \rangle_{[s_{i-1}, s_{i+1}]}, & s_i < s_p^N \\ -k\langle F_1, \phi_i \rangle_{[s_{i-1}, s_i]} - k\langle F_2, \phi_i \rangle_{[s_i, s_{i+1}]}, & s_i = s_p^N \\ -k\langle F_2, \phi_i \rangle_{[s_{i-1}, s_{i+1}]}, & s_i > s_p^N \end{cases},$$

dengan $F_1(s) = Ds\left(\frac{K}{S}\right) - Ds$ dan $F_2(s) = Ds\left(\frac{K}{S}\right) - rK$ dan $s_p^{N-1} = \min_{1 \le i \le M-1} \left\{ s_i \ge s_p^N \,\middle|\, \left| w_h^{N-1}(s_i) - W(s_{i+1}) \right| \le \varepsilon \right\}$ dengan $\varepsilon = 10^{-4}$

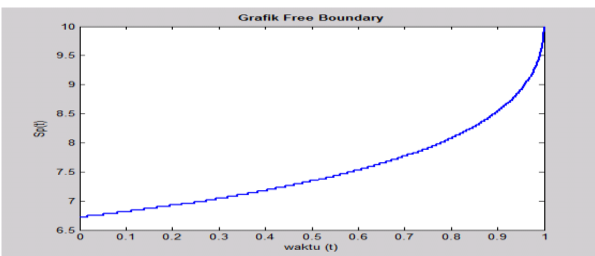
Tahap 3. Pada tahap ke-3 akan dihitung nilai-nilai pada *grid* ke-N-2, N-3, ..., 1, 0. Pada tahap ini, $\alpha^j = (2A-B)^{-1}B\alpha^{j+2} + 2(2A-B)^{-1}f^{j+1}$ dengan A, B matriks tridiagonal berukuran (M-1)×(M-1) seperti pada (14-15) dan

$$f^{j+1} = \begin{pmatrix} f_1^{j+1} \\ f_2^{j+1} \\ \vdots \\ f_{M-1}^{j+1} \end{pmatrix} \text{ dengan } j=N\text{-}2, N\text{-}1, \ldots, 1, 0 \text{ dan}$$

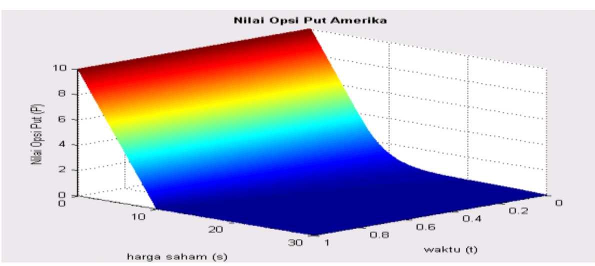
$$s_p^j = \min_{1 \le i \le M-1} \left\{ s_i \ge s_c^{j+1} \left\| w_h^j(s_i) - W(s_{i+1}) \right| \le \varepsilon \right\}$$



(a)



(b)

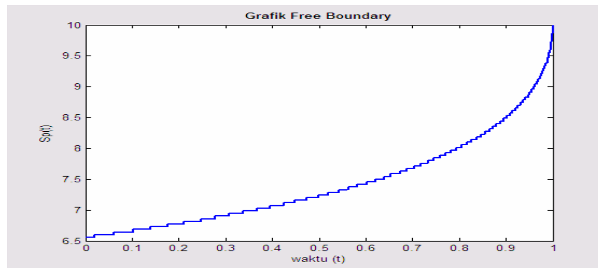


(c)

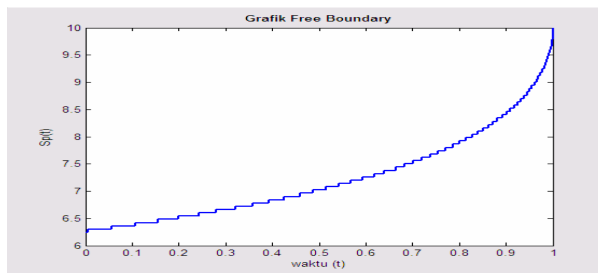
Gambar 3. Grafik *Payoff* dan grafik *free boundary* opsi *put* Amerika dengan *dividen* D=0

Ketiga tahapan di atas dijalankan dengan menggunakan *software* Matlab 6.5.1. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *input-input* $K=10$, $T=1$, $\sigma=0.35$, $D=0$, $r=0.05$, dan $T=1$ serta $\varepsilon=10^{-4}$, $M=N=1200$, $S=25$, diperoleh hasil seperti pada gambar 3 (a). Dari gambar tersebut, nilai opsi merupakan fungsi yang kontinu terhadap s, *smooth* (halus), dan kemiringannya kontinu. Berdasarkan hasil komputasi, diperoleh batas *exercise* optimalnya adalah 6.6 yang merupakan perpotongan antara kurva nilai opsi *put* pada saat t = 0 (warna merah) dengan kurva *Payoff* (warna hitam), atau dinyatakan seperti gambar 3(b) dan 3(c).

Gambar 4 adalah hasil simulasi dengan menggunakan *dividen* 0.01 (gambar 4(a)) diperoleh s_p=6.55 dan dengan *dividen* 0.03 (gambar 4(b)) diperoleh s_p=6.24. Jadi, semakin desar *dividen* yang dibayarkan, akan semakin besar pula penurunan nilai opsi setelah pembayaran *dividen*.



(a)



(b)

Gambar 4. Grafik *Payoff* dan grafik *free boundary* opsi *call* Amerika tanpa *dividen*

PENUTUP

Metode elemen hingga berguna untuk menyelesaikan permasalahan opsi Amerika khususnya untuk opsi yang membayarkan *dividen*, karena dengan metode ini penentuan jarak antar *grid* dan jumlah *grid* dapat diatur. Dengan *grid* yang *equidistant*, hasil yang diperoleh cukup akurat. Hasil yang lebih baik mungkin dapat diperoleh jika menggunakan *grid* yang *non-equidistant* khususnya disekitar batas *exercise*.

Dengan menggunakan metode ini, dapat diketahui nilai opsi Amerika yang membayarkan *dividen* serta batas yang optimal untuk meng*exercise* opsi Amerika.

Berdasarkan keseluruhan analisa dan simulasi yang telah dilakukan sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa kurva batas *exercise* untuk opsi *call* Amerika dengan *dividen* merupakan kurva fungsi yang monoton turun, sedangkan kurva batas *exercise* untuk opsi put Amerika dengan *dividen* merupakan kurva fungsi yang monoton naik.

DAFTAR PUSTAKA

Higham, D.J. (2004), An Introduction to Financial *Option* Valuation, Cambridge University Press

Kang, S. et al. (2003), Finite Element Methods for The Price and The *Free Boundary* of American *Call* and *Put Option*s, Departement of Mathematics Pohang University of Science and Technology, South Korea

Kwok, Y.K. (1998), Mathematical Models of Financial Derivatives, Springer, Singapore

Mitchell, A.R. et al. (1978), The Finite Element Method in Partial Differential Equations, John Wiley & Sons

Pauly, O. (2004), Numerical Simulations of American *Option*s, Tesis Program Magister, Universitas Ulm

Seydel, R. (2007), Tools for Computational Finance, Springer-Verlag, Berlin.